APLIKASI GRUP PADA TEORI MUSIK

SKRIPSI

TASLIMUL HAQ
04934004

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS ANDALAS
PADANG 2011

KATA PENGANTAR

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَٰنِ الرَّحِيمِ

Syukur Alhamdulillah, penulis ucapkan kehadirat Allah SWT karena berkat rahmat dan karunia-Nya, penulis dapat menyelesaikan skripsi dengan judul "**Aplikasi Grup Pada Teori Musik**". Penulisan skripsi ini merupakan salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains (S.Si) pada Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Andalas.

Dalam penyelesaian skripsi ini, penulis banyak mendapatkan bimbingan, ilmu, dan motivasi dari berbagai pihak. oleh karena itu, pada kesempatan ini penulis ingin menyampaikan rasa terima kasih dan penghargaan yang tulus kepada :

1. Papa, mama, kakak-kakak dan adik-adik beserta keluarga yang selalu memberikan semangat dan kekuatan yang luar biasa.
2. Ibu Monika Rianti Helmi, M.Si selaku dosen pembimbing I dan Dra. Nova Noliza Bakar, M.Si selaku dosen pembimbing II, atas waktu, bimbingan, pengarahan, dan saran.
3. Bapak Zulakmal, M.Si dan Ibu Dr. Lyra Yulianti selaku tim penguji, atas saran dan waktunya.
4. Bapak Dr. Syafrizal Sy, selaku Ketua Jurusan Matematika FMIPA Universitas Andalas Padang.
5. Ibu Dr. Maiyastri selaku dosen Pembimbing Akademik.
6. Bapak dan Ibu dosen beserta staf Jurusan Matematika FMIPA Universitas Andalas Padang.

7. Rekan-rekan Matematika, junior dan senior, khususnya Mandapek atas kebersamaan dan segala kebaikannya.
8. Teman-teman dan semua pihak yang telah membantu penulis selama studi.

Akhirnya untuk kesempurnaan skripsi ini, kritik dan saran yang konstruktif dari pembaca sangat membantu untuk perbaikan dimasa yang akan datang. semoga skripsi ini bermanfaat bagi semua pihak. Terima kasih.

Padang, Oktober 2011

Penulis

ABSTRAK

Musik adalah sesuatu yang sangat lekat dengan kehidupan kita. Menurut Kamus Besar Bahasa Indonesia, musik adalah ilmu atau seni menyusun nada atau suara di urutan, kombinasi, dan hubungan temporal untuk menghasilkan komposisi (suara) yang mempunyai kesatuan dan kesinambungan. Untuk menciptakan skala musikal, seorang musisi membagi oktaf menjadi 12 kelas tangga nada. Seorang musisi mengkontruksi suatu melodi/irama, dengan menggunakan operasi matematika yakni fungsi transposisi dan fungsi inversi.

Penelitian ini bertujuan untuk menjelaskan fungsi transposisi dan inversi pada teori musik, menjelaskan grup T/I yang dibentuk dari fungsi transposisi dan fungsi inversi. Dari pembahasan didapatkan bahwa pada jam musikal, fungsi transposisi T_1 adalah perputaran searah jarum jam sejauh $\frac{1}{2}$ putaran sedangkan fungsi inversi I_0 adalah refleksi pada jam dengan poros 0-6, fungsi transposisi dan inversi adalah fungsi yang domain dan kodomainnya adalah bilangan bulat modulo 12 yang didefinisikan dengan $T_n(x) = (x+n) \bmod 12$ dan $I_n(x) = (-x+n) \bmod 12$, fungsi transposisi dan fungsi inversi yang diaplikasikan pada kelas tangga nada akan menghasilkan nada baru yang memiliki bunyi yang sama tetapi berbeda pada tinggi rendah nada, dan himpunan fungsi transposisi dan fungsi inversi membentuk grup*T/I.*

Kata kunci : *fungsi transposisi, fungsi inversi, grup, grup T/I.*

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

No **Halaman**

DAFTAR GAMBAR

No **Halaman**

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Musik merupakan sesuatu yang sangat lekat dengan kehidupan. Rangkaian nada-nada yang tersusun dalam pola ritmik tertentu membentuk melodi yang memiliki variasi hamper tak terbatas. Setiap rangkaian musik memiliki keunikan sendiri, karena musik diciptakan oleh hasil pemikiran manusia yang berbeda. Musik merupakan hasil budaya yang merupakan hasil cipta akal dan pemikiran manusia.

Menurut Kamus Besar Bahasa Indonesia, musik adalah ilmu atau seni menyusun nada atau suara di urutan, kombinasi, dan hubungan temporal untuk menghasilkan komposisi (suara) yang mempunyai kesatuan dan kesinambungan, nada atau suara yang disusun demikian rupa sehingga mengandung irama, lagu, dan keharmonisan (terutama yang menggunakan alat-alat yang dapat menghasilkan bunyi-bunyi itu).

Banyak yang berpendapat bahwa matematika tidak dapat diaplikasikan ke dalam teori musik. Asumsi ini sebenarnya salah, sebagai contoh sederhana, not angka dalam musik menggunakan angka yang berhubungan erat dengan matematika. Tingkatan angka menentukan tingkatan tinggi atau rendahnya nada tersebut.

Musik menggunakan beberapa konsep dari matematika, seperti teori himpunan untuk mengatur objek musik, diantaranya suara, nada, ritme, dan menggambarkan hubungan mereka. Misalnya satu set nada bisa membentuk akord. Akord berarti kombinasi tiga nada atau lebih yang bersuara sama di satu oktaf.

Untuk menciptakan skala musikal, seorang musisi membagi oktaf menjadi beberapa nada yang berhingga. Biasanya oktaf dibagi menjadi 12 kelas-kelas tangga nada. Setiap nada-nada ini menciptakan suatu kategori yang secara teori musik berkaitan dengan kelas tangga nada.

Seorang musisi mengkontruksi suatu melodi/irama, dengan menggunakan operasi matematika yakni fungsi transposisi dan fungsi inversi. Misalkan n sebuah bilangan bulat mod 12. Maka fungsi $T_n : Z_{12} \to Z_{12}$ dengan $T_n(x) = (x+n) \bmod 12$ disebut fungsi transposisi oleh n pada x, dan fungsi $I_n : Z_{12} \to Z_{12}$ dengan $I_n(x) = (-x+n) \bmod 12$, disebut fungsi inversi oleh n pada x. Kedua fungsi ini dapat mentransformasikan suatu himpunan kelas tangga nada ke himpunan kelas tangga nada yang lain. Fungsi transposisi dan inversi berguna untuk membuat variasi pada nada [4]. Hasil transformasi keseluruhan dari fungsi inimerupakan variasi yang mungkin terjadi dalam suatu nada yang diberikan.

Jika dihimpun keseluruhan fungsi transposisi dan fungsi inversi dan kemudian dilakukan operasi fungsi komposisi, maka himpunan semua fungsi ini akan membentuk suatu grup. Misalkan G terdiri dari 24 fungsi $T_n : S \to S$ dan $I_n : S \to S$, dengan $n = 0,1,2,\dots,11$. Misalkan $\circ$ adalah fungsi komposisi. Maka G yang dilengkapi dengan fungsi komposisi $\circ : G \times G \to G$ membentuk grup. Grup ini dinamakan dengan grup *T/I*.

1.2 Perumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka permasalahan pada tugas akhir ini adalah bagaimana kaitan teori grup dengan musik.

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, maka tujuan dari penulisan ini adalah menjelaskan tentang fungsi transposisi dan inversi pada teori musik dan menjelaskan grup T/I yang dibentuk dari fungsi transposisi dan fungsi inversi.

1.4 Batasan Masalah

Penelitian ini dibatasi pada grup T/I.

1.5 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan penelitian ini adalah sebagai berikut : Bab I Pendahuluan, yang terdiri dari : latar belakang, perumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, dan sistematika penulisan. Bab II Landasan Teori, yang menjelaskan tentang teori-teori yang menjadi dasar pada pembahasan. Selanjutnya Bab III Pembahasan. Dan terakhir Bab IV Kesimpulan dan Saran, yang berisi kesimpulan dan saran.

BAB II

LANDASAN TEORI

Pada landasan teori ini, akan dijelaskan tentang himpunan, fungsi, bilangan bulat modulo, dan grup, yang merupakan konsep dasar pada aljabar. Selain itu, juga akan dijelaskan tentang teori musik dan akord yang merupakan dasar pada musik.

2.1 Himpunan

Himpunan digunakan untuk mengelompokkan objek bersama-sama. Teori himpunan merupakan konsep paling dasar dalam pembahasan objek-objek diskrit.

Definisi 2.1.1 [1]

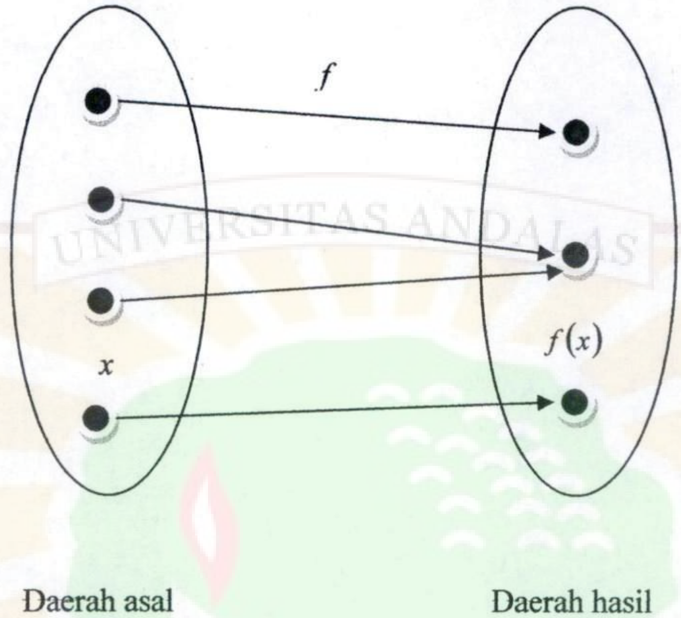
Himpunan adalah kumpulan objek-objek yang berbeda.

Ada beberapa cara untuk menyajikan himpunan. Salah satunya adalah dengan enumerasi. Mengenumerasi artinya menuliskan semua elemen himpunan yang bersangkutan di antara dua buah tanda kurung kurawal. Biasanya suatu himpunan diberi nama dengan menggunakan huruf capital dan elemennya dengan huruf kecil.

2.2 Fungsi

Definisi 2.2.1 [7]

Sebuah fungsi f adalah suatu aturan korespondensi (padanan) yang menghubungkan tiap objek x dalam satu himpunan, yang disebut daerah asal, dengan sebuah nilai tunggal $f(x)$ dari himpunan kedua. Himpunan nilai yang diperoleh secara demikian disebut daerah hasil fungsi tersebut.



Gambar 2.2.1 Fungsi

Definisi 2.2.1 [7]

Misalkan f adalah fungsi dari himpunan A ke himpunan B, dan g adalah fungsi dari himpunan B ke himpunan C. Komposisi f dan g, dinotasikan dengan $f \circ g$, adalah fungsi dari A ke C yang didefinisikan oleh

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

Dengan kata lain, menurut Definisi 2.2.1, fungsi g diterapkan terlebih dahulu, baru kemudian fungsi f.

2.3 Bilangan Bulat Modulo

Definisi 2.3.1 [5]

Misal $n > 0$ adalah bilangan bulat. Didefinisikan $a \equiv b \bmod n$ jika $n \mid (a-b)$.

Relasi diatas menujukkan kongruen modulo *n*, *n* disebut modulus, dan $a \equiv b \bmod n$ dibaca "*a kongruen ke b modulo n*".

2.4 TeoriGrup

Teori grup dalam musik menggambarkan cara-cara himpunan nada-nada berhubungan dan bagaimana mentransformasikan satu nada ke nada yang lain. Hasil transformasi inilah yang menghasilkan suatu melodi atau irama.

Definisi 2.4.1 [1]

Suatu grup adalah suatu himpunan yang dilengkapi dengan fungsi $* : G \to G$ dan memenuhi aksioma berikut :

1) Untuk setiap $a, b \in G$ berlaku $a * b \in G$.
2) Untuk setiap $a, b, c \in G$ berlaku $a*(b*c) = (a*b)*c$.
3) Terdapat $e \in G$ sehingga berlaku $a * e = a = e * a$ untuk setiap $a \in G$. Untuk e disebut unsur identitas atau unsur satuan.
4) Untuk setiap $a \in G$ terdapat unsur a^{-1}, sehingga $a * a^{-1} = e = a^{-1} * a$. Unsur a^{-1} disebut unsur invers dari unsur *a*.

Contoh :

1. Himpunan bilangan bulat $Z = \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\}$dilengkapi dengan fungsi $+ : Z \to Z$ memenuhi seluruh aksioma pada Definisi 2.4.1 dengan unsur identitas adalah 0 dan unsur invers bagi setiap$a \in Z$ adalah $-a$.
2. Himpunan bilangan riil tanpa 0, $R\backslash 0$, dilengkapi dengan fungsi $\times : R \to R$ memenuhi seluruh aksioma pada Definsi 2.4.1 dengan unsur identitas adalah 1 dan unsur invers bagi setiap $a \in R$ adalah $\frac{1}{a}$.

2.5 Teori Musik

Teori musik merupakan cabang ilmu yang menjelaskan unsur-unsur musik. Cabang ilmu ini mencakup pengembangan dan penerapan metode untuk menganalisis maupun mengubah musik, dan keterkaitan antara notasi musik dan pembawaan musik. Hal-hal yang dipelajari dalam teori musik misalnya suara, nada, notasi, ritme, melodi, dan harmoni.

a. Suara [9]

Teori musik menjelaskan bagaimana suara dinotasikan atau dituliskan dan bagaimana suara tersebut ditangkap dalam benak pendengarnya. Dalam musik, gelombang suara biasanya dibahas tidak dalam panjang gelombangnya maupun periodenya, melainkan dalam frekuensinya.

b. Nada [9]

Nada adalah bunyi yang teratur, artinya : mempunyai bilangan getar (frekuensi) yang tertentu. Tinggi rendahnya bunyi (suara) bergantung pada besar kecilnya frekuensi tersebut.

c. Ritme [9]

Sebuah lagu merupakan alun bunyi yang teratur. Di dalam lagu, selalu ditemukan pertentangan bunyi antara bagian yang berat dan bagian yang ringan. Pertentangan bunyi tersebut selalu terulang (kembali) dan teratur. Inilah yang disebut irama atau ritme.

d. Notasi [9]

Notasi musik merupakan penggambaran tertulis terhadap musik. Nada dapat ditulis pada garis-garis paranada dan disebut juga not balok. Berbeda dengan not angka, not balok sekaligus menggambarkan tinggi rendahnya nada, sedangkan not angka tidak jelas menunjukkan tinggi rendahnya nada.

e. Harmoni [9]

Harmoni secara umum dapat dikatakan sebagai kejadian dua atau lebih nada dengan tinggi berbeda dibunyikan bersamaan, walaupun harmoni juga dapat terjadi bila nada-nada tersebut dibunyikan berurutan. Harmoni yang terdiri dari tiga atau lebih nada yang dibunyikan bersamaan biasanya disebut akord.

f. Melodi [9]

Melodi adalah serangkaian nada dalam waktu. Rangkaian tersebut dapat dibunyikan sendirian, yaitu tanpa iringan, atau dapat merupakan bagian dari akord dalam waktu (biasanya merupakan rangkaian nada tertinggi dalam akord-akord tersebut).

2.6 Model Bilangan Bulat dari Nada

Nada dasar suatu karya musik menentukan frekuensi tiap nada dalam karya tersebut. Nada dalam teori musik diatonis barat, diidentifikasikan menjadi 12 nada yang masing-masing diberi nada C, D, E, F, G, A, dan B, serta nada-nada kromatis yaitu C#, D#, F#, G#, A#, dan urutannya seperti pada Gambar 2.6.1.

Gambar 2.6.1Nada Piano atau Keyboard

Dari Gambar 2.6.1 dapat dilihat 12 nada C, D, E, F, G, A, B, C#, D#, F#, G#, A#. Dalam teori musik, 12 nada tersebut dapat diterjemahkan kebentuk bilangan bulat modulo 12. Nada C dinotasikan dengan 0, C# dinotasikan dengan 1. Berikut dapat dilihat pada Tabel 2.6.1 yang merupakan tabel terjemahan dari 12 nada ke dalam bentuk bilangan modulo 12.

Tabel 2.6.1 Terjemahan 12 Nada ke Dalam Bentuk Bilangan Modulo 12

Nada	Terjemahan ke Dalam Bilangan Bulat Modulo 12
C	0
$C\#=D_b$	1
D	2
$D\#=E_b$	3
E	4
F	5
$F\#=G_b$	6
G	7
$G\#=A_b$	8
A	9
$A\#=B_b$	10
B	11

Nada yang diikuti tanda # dibaca 'nada kres', contoh$C\# = C$-kres, dan nada yang diikuti b dibaca 'nada-mol', contoh $D_b = D$-mol. 12 nada C, C#, D, D#, E, F, F#, G, G#, A, A#, B dinamakan nada utama atau nada dasar dalam teorimusik. Pada model tangga nada ini, akord C diperoleh dengan memainkan tiga nada sekaligus, yakni $\langle C, E, G\rangle$ yang jika dituliskan ke dalam bentuk angka menjadi $\langle 0, 4, 7\rangle$.

Himpunan tidak terurut, misalnya$\langle 0, 4, 7\rangle$ biasa disebut pcsets (himpunan kelas tangga nada), sedangkan himpunan terurut seperti $\langle 0, 0, 4, 4, 7, 7, 4, 5, 5\rangle$ disebut dengan pcsegs (segmen kelas tangga nada). Kurung siku $\langle\quad\rangle$ biasa digunakan oleh para pembuat teori musik untuk menegaskan bahwa nada-nada ini terurut. Pada suatu himpunan, urutan tidak diperhatikan karena himpunan hanyalah kumpulan dari unsur-unsur.

Akord G diperoleh dengan memainkan tiga nada sekaligus yakni $\langle G, B, D\rangle$ yang jika dituliskan ke dalam bentuk angka menjadi $\langle 7, 11, 2\rangle$. Untuk lebih jelasnya, diperlihatkan pada Tabel2.6.2 berikut :

Tabel 2.6.2 Akord

Akord	Tiga Nada yang Dimainkan
C	$\langle 0,4,7\rangle$
$C\#=D_b$	$\langle 1,5,8\rangle$
D	$\langle 2,6,9\rangle$
$D\#=E_b$	$\langle 3,7,10\rangle$
E	$\langle 4,8,11\rangle$
F	$\langle 5,9,0\rangle$
$F\#=G_b$	$\langle 6,10,1\rangle$
G	$\langle 7,11,2\rangle$
$G\#=A_b$	$\langle 8,0,3\rangle$
A	$\langle 9,1,4\rangle$
$A\#=B_b$	$\langle 10,2,5\rangle$
B	$\langle 11,3,6\rangle$

BAB III

GRUP T/I

Pada pembahasan ini akan dijelaskan tentang fungsi transposisi, fungsi inversi dan pembentukan grup T/I dari fungsi transposisi dan fungsi inversi.

3.1 Fungsi Transposisi dan Fungsi Inversi

Definisi 3.1.1 [4]

Misalkan n adalah bilangan bulat mod 12. Maka fungsi $T_n : \mathrm{Z}_{12} \rightarrow \mathrm{Z}_{12}$ dengan definisi $T_n(x) = (x+n) \bmod 12$ disebut **fungsi transposisi oleh *n*.**

Perhatikan fungsi $f : \mathrm{Z}_{12} \rightarrow \mathrm{Z}_{12}$. Fungsi ini merupakan fungsi yang domainnya adalah bilangan bulat modulo 12 dan kodomainnya juga bilangan bulat modulo 12. Misalkan $T_2 : Z_{12} \rightarrow Z_{12}$ dengan $T_2(x) = (x+2) \bmod 12$ untuk setiap $x \in \mathrm{Z}_{12}$. Fungsi ini mempunyai hasil sebagai berikut.

$$
\begin{aligned}
T_2(\bar{0}) &= (\bar{0}+\bar{2}) \bmod 12 = \bar{2} \bmod 12 \\
T_2(\bar{1}) &= (\bar{1}+\bar{2}) \bmod 12 = \bar{3} \bmod 12 \\
T_2(\bar{2}) &= (\bar{2}+\bar{2}) \bmod 12 = \bar{4} \bmod 12 \\
T_2(\bar{3}) &= (\bar{3}+\bar{2}) \bmod 12 = \bar{5} \bmod 12 \\
T_2(\bar{4}) &= (\bar{4}+\bar{2}) \bmod 12 = \bar{6} \bmod 12 \\
T_2(\bar{5}) &= (\bar{5}+\bar{2}) \bmod 12 = \bar{7} \bmod 12 \\
T_2(\bar{6}) &= (\bar{6}+\bar{2}) \bmod 12 = \bar{8} \bmod 12 \\
T_2(\bar{7}) &= (\bar{7}+\bar{2}) \bmod 12 = \bar{9} \bmod 12 \\
T_2(\bar{8}) &= (\bar{8}+\bar{2}) \bmod 12 = \overline{10} \bmod 12 \\
T_2(\bar{9}) &= (\bar{9}+\bar{2}) \bmod 12 = \overline{11} \bmod 12 \\
T_2(\overline{10}) &= (\overline{10}+\bar{2}) \bmod 12 = \bar{0} \bmod 12 \\
T_2(\overline{11}) &= (\overline{11}+\bar{2}) \bmod 12 = \bar{1} \bmod 12
\end{aligned}
$$

Misalkan $T_5 : Z_{12} \to Z_{12}$, maka

$$
\begin{aligned}
T_5(\bar{3}) &= (\bar{3}+\bar{5}) \bmod 12 = \bar{8} \bmod 12 \\
T_5(\bar{6}) &= (\bar{6}+\bar{5}) \bmod 12 = \overline{11} \bmod 12 \\
T_5(\bar{7}) &= (\bar{7}+\bar{5}) \bmod 12 = \bar{0} \bmod 12 \\
T_5(\overline{10}) &= (\overline{10}+\bar{5}) \bmod 12 = \overline{15} \bmod 12 = \bar{3} \bmod 12
\end{aligned}
$$

Berikut ini definisi dari fungsi inversi.

Definisi 3.1.2 [4]

Misalkan n bilangan bulat mod 12. Maka fungsi $I_n : Z_{12} \to Z_{12}$ dengan definisi $I_n = (-x+n) \bmod 12$ disebut fungsi inversi pada x.

Misalkan $I_7 : Z_{12} \to Z_{12}$, maka :

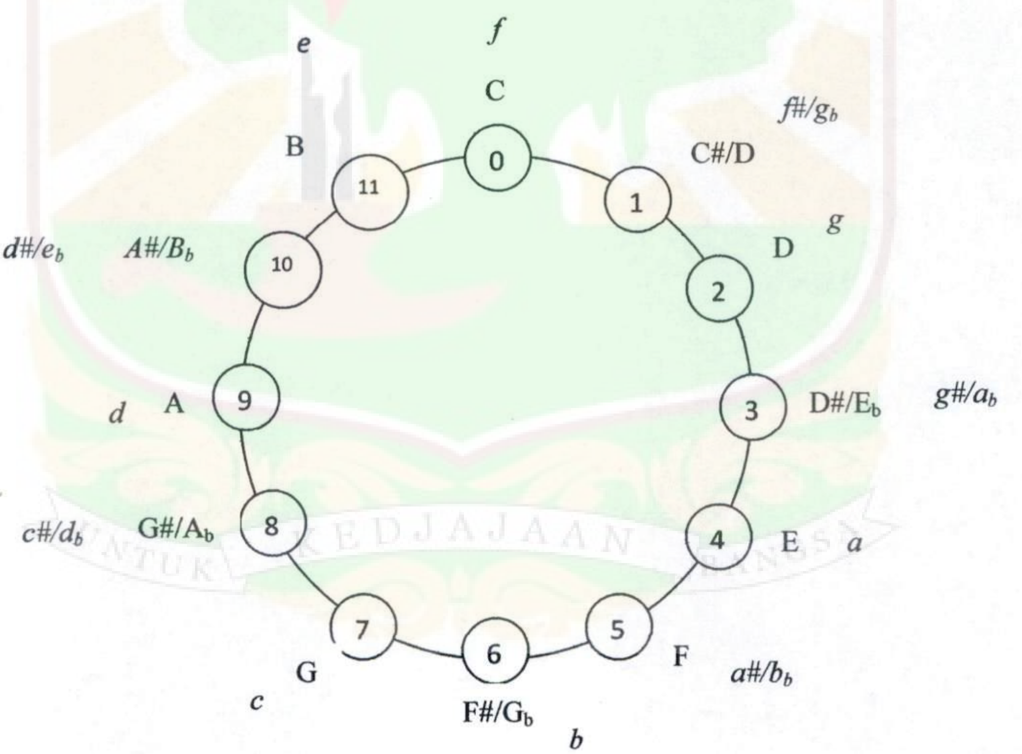
$$
\begin{aligned}
I_7(3) &= (-3+7) \bmod 12 = 4 \bmod 12 \\
I_7(7) &= (-7+7) \bmod 12 = 0 \bmod 12 \\
I_7(9) &= (-9+7) \bmod 12 = -2 \bmod 12 = 10 \bmod 12
\end{aligned}
$$

Seorang composer menggunakan transposisi dan inversi keseluruh kelas tangga nada atau segmen pola nada.Kelas tangga nada C mayor yang ditransposisikan dengan 7, dapat ditulis$T_7\{\bar{0},\bar{4},\bar{7}\}$adalah

$$
\begin{aligned}
T_7\{\bar{0},\bar{4},\bar{7}\} &= \{T_7(\bar{0}),T_7(\bar{4}),T_7(\bar{7})\} \\
&= \{(\bar{0}+\bar{7}) \bmod 12,(\bar{4}+\bar{7}) \bmod 12,(\bar{7}+\bar{7}) \bmod 12\} \\
&= \{\bar{7} \bmod 12,\overline{11} \bmod 12,\bar{2} \bmod 12\} \\
&= \{\bar{7},\overline{11},\bar{2}\} = \{G,B,D\}.
\end{aligned}
$$

Sama halnya dengan segmen pola nada $\langle \bar{0},\bar{0},\bar{4},\bar{4},\bar{7},\bar{7},\bar{4},\bar{5},\bar{5},\bar{2},\bar{2},\overline{11},\overline{11},\bar{7}\rangle$ diinversi dengan 0 maka diperoleh$\langle \bar{0},\bar{0},\bar{8},\bar{8},\bar{5},\bar{5},\bar{8},\bar{7},\bar{7},\overline{10},\overline{10},\bar{1},\bar{1},\bar{5}\rangle$.

Fungsi transposisi dan inversi ini dapat digambarkan dengan jam musikal, seperti padaGambar 3.1.1berikut.



Gambar3.1.1 : Jam musikal

Bilangan bulat modulo 12 yaitu $\overline{0},\overline{1},\overline{2},\overline{3},\overline{4},\overline{5},\overline{6},\overline{7},\overline{8},\overline{9},\overline{10},\overline{11}$ merupakan 12 nada dalam musik. Seperti yang telah dibahas sebelumnya, fungsi transposisi identik dengan fungsi translasi dan fungsi inversi identik dengan fungsi refleksi. Apabila dilakukan transposisi T_1 terhadap masing-masing nada pada jam musikal diatas, maka akan terjadi perputaran searah jarum jam sejauh $\frac{1}{12}$ putaran. Dan apabila dilakukan inversi I_0 terhadap masing-masing nada pada jam musikal di atas, maka akan terjadi refleksi pada jam musikal dengan poros 0-6.

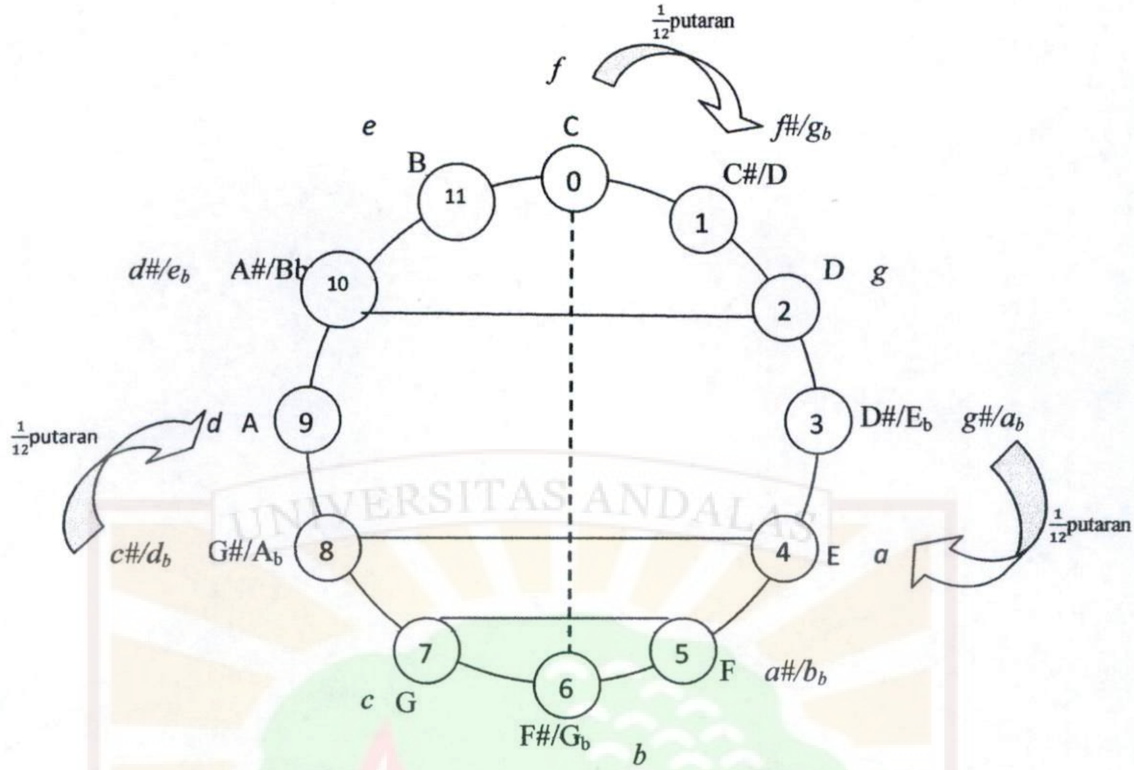
Contoh :

- $T_1(C) = T_1\{0,4,7\} = \{(0+1) \bmod 12, (4+1) \bmod 12, (7+1) \bmod 12\} = \{1,5,8\} = C\#/D_b$
- $T_1(c\#/d_b) = T_1\{8,4,1\} = \{(8+1) \bmod 12, (4+1) \bmod 12, (1+1) \bmod 12\} = \{9,5,2\} = d$
- $T_1(D\#/E_b) = T_1\{3,7,10\} = \{(3+1) \bmod 12, (7+1) \bmod 12, (10+1) \bmod 12\} = \{4,8,11\} = E$
- $I_0(F) = I_0\{5,9,0\} = \{(-5+0) \bmod 12, (-9+0) \bmod 12, (-0+0) \bmod 12\} = \{7,3,0\} = c$
- $I_0(D) = I_0\{2,6,9\} = \{(-2+0) \bmod 12, (-6+0) \bmod 12, (-9+0) \bmod 12\} = \{10,6,3\} =$

  $d\#/e_b$
- $I_0(a) = I_0(4,0,9) = \{(-4+0) \bmod 12, (-0+0) \bmod 12, (-9+0) \bmod 12\} = \{8,0,3\}$

  $= G\#/A_b$.

Apabila hasil transposisi dan inversi dari beberapa nada di atas ingin dicari dengan menggunakan jam musikal, maka hasilnya dapat ditentukan dengan menggunakan Gambar 3.1.2 di bawah ini :



Gambar3.1.2 :Fungsitransposisidanfungsiinversipada jam musikal

Seperti yang telahdijelaskan sebelumnya, transposisi dan inversi pada nada dapat digunakan untuk mengubah atau membuat variasi pada nada. Sebagai contoh pada lagu Indonesia Raya yang memiliki nada: $\langle$ C,C,C,G,G,G,G,C,C,C,C,G,F,F,C,G,C,F,C,G,C,F,C,G,C,C,F,C,G,C,C,F,C,G,C,C $\rangle$ dengan menggunakan fungsi transposisi dan fungsi inversi pada nada ini, akan diperoleh nada baru yang memiliki bunyi sama tetapi berbeda pada tinggi dan rendahnya nada. Apabila mengaplikasikan fungsi T_1, akan didapatkan susunan nada baru sebagai berikut : $\langle$ C#, C#, C#, G#, G#, G#, G#, C#, C#, C#, C#, G#, F#, F#, C#, G#, C#, F#, C#, G#, C#, F#, C#, G#, C#, C#, F#, C#, G#, C#, C#, F#, C#, G#, C#, C# $\rangle$, dan jika diaplikasikan fungsi I_0 akan susunan nada baru sebagai berikut : $\langle$ *f, f, f, a#, a#, a#, a#, f, f, f, f, a#, c, c, f, a#, f, c, f, a#, f, c, f, a#, f, f, c, f, a#, f, f, c, f, a#, f, f* $\rangle$.

3.2 Grup T/I

Sebelum menjelaskan tentang grup T/I, terlebih dahulu akan dijelaskan bentuk utama dan bentuk inversi dari nada.

3.2.1 Bentuk Utama dan Bentuk Inversi

Misalkan S himpunan transposisi dan inversi yang membentuk paduan nada C mayor $\langle 0,4,7\rangle$. Unsur-unsurdari S dari bentuk utama :$C = \langle 0,4,7\rangle, C\# = D_b = \langle 1,5,8\rangle$, $D = \langle 2,6,9\rangle$, $D\# = E_b = \langle 3,7,10\rangle$, $E = \langle 4,8,11\rangle$, $F = \langle 5,9,0\rangle$, $F\# = G_b = \langle 6,10,1\rangle$, $G = \langle 7,11,2\rangle$, $G\# = A_b = \langle 8,0,3\rangle$, $A = \langle 9,1,4\rangle$, $A\# = B_b = \langle 10,2,5\rangle, B = \langle 11,3,6\rangle$, dan bentuk inversi : $f = \langle 0,8,5\rangle, f\# = g_b = \langle 1,9,6\rangle, g = \langle 2,10,7\rangle, g\# = a_b = \langle 3,11,8\rangle$, $a = \langle 4,0,9\rangle$, $a\# = b_b = \langle 5,1,10\rangle$, $b = \langle 6,2,11\rangle$, $c = \langle 7,3,0\rangle, c\# = d_b = \langle 8,4,1\rangle, d = \langle 9,5,2\rangle, d\# = e_b = \langle 10,6,3\rangle, e = \langle 11,7,4\rangle$.

S merupakan himpunan dari paduan nada mayor dan minor, yang keseluruhannya 24 nada. Sebagai catatan yang huruf capital adalah tangga nada mayor dan huruf kecil adalah tangga nada minor.

3.2.2 Grup T/I

Teorema 3.2.1[4]

Misalkan G terdiridari 24 fungsi $T_n : S \to S$ dan $I_n : S \to S$, dengan $n = 0,1,2,\ldots,11$. Misalkan $\circ$ adalah fungsi komposisi. Maka$G$ yang dilengkapi dengan fungsi komposisi $\circ : G \times G \to G$ membentuk grup. Grup ini dinamakan dengan grup *T/I*.

Sebelum membuktikan teorema 3.2.1 terlebih dahulu akan dibuktikan proposisi 3.2.2 berikut ini

Proposisi 3.2.2

Misal n dan $m$adalah bilangan bulat modulo 12.Maka komposisi antara fungsi transposisi dan fungsi inversi mengikuti aturan :

i. $T_m(x) \circ T_n(x) = T_{m+n}(x)$

ii. $T_m(x) \circ I_n(x) = I_{m+n}(x)$

iii. $I_m(x) \circ T_n(x) = I_{m-n}(x)$

iv. $I_m(x) \circ I_n(x) = T_{m-n}(x)$.

Bukti :

i. $T_m(x) \circ T_n(x) = T_m(T_n(x)) = T_m((x+n) \bmod 12)$

$$= [((x+n) \bmod 12) + m] \bmod 12$$

$$= (x+n+m) \bmod 12$$

$$= T_{m+n}(x)$$

ii. $T_m(x) \circ I_n(x) = T_m(I_n(x)) = T_m((-x+n) \bmod 12)$

$$= [((-x+n) \bmod 12) + m] \bmod 12$$

$$= (-x+n+m) \bmod 12$$

$$= I_{m+n}(x)$$

iii. $I_m(x) \circ T_n(x) = I_m(T_n(x)) = I_m((x+n) \bmod 12)$

$$= [(-(x+n) \bmod 12) + m] \bmod 12$$

$$= (-x-n+m) \bmod 12$$

$$= (-x+m-n) \bmod 12$$

$$= I_{m-n}(x)$$

iv. $I_m(x) \circ I_n(x) = I_m(I_n(x)) = I_m((-x+n) \bmod 12)$

$$= [(-(-x+n) \bmod 12) + m] \bmod 12$$

$$= (x-n+m) \bmod 12$$

$$= (x+m-n) \bmod 12$$

$$= T_{m-n}(x).$$

Selanjut nya akan dibuktikan Teorema 3.2.1 dengan langkah-langkah sebagai berikut :

1. G bersifat tertutup terhadap operasi komposisi, setiap operasi komposisi unsur di G berada di G.

   Akan dibuktikan bahwa G yang terdiri dari 24 fungsi transposisi dan fungsi inversi membentuk grup terhadap komposisi.

   Berdasarkan Proposisi 3.2.2, dapat disimpulkan bahwa

   $T_n \circ T_m = T_{m+n} \in T/I$.

   $T_m \circ I_n = I_{m+n} \in T/I$.

   $I_m \circ T_n = I_{m-n} \in T/I$.

   $I_m \circ I_n = T_{m-n} \in T/I$.

Jelas dari Proposisi 3.2.2 bahwa komposisi bersifat tertutup, karena setiap operasi komposisi di *T/I* berada di *T/I*.

2. G bersifat asosiatif terhadap operasi komposisi .

   Akan ditunjukkan :

   a. $(T_n \circ T_m) \circ T_p = T_n \circ (T_m \circ T_p)$.
   b. $(T_n \circ T_m) \circ I_p = T_n \circ (T_m \circ I_p)$.
   c. $(T_n \circ I_m) \circ T_p = T_n \circ (I_m \circ T_p)$.
   d. $(T_n \circ I_m) \circ I_p = I_n \circ (I_m \circ I_p)$.
   e. $(I_n \circ T_m) \circ T_p = I_n \circ (T_m \circ T_p)$.
   f. $(I_n \circ T_m) \circ I_p = I_n \circ (T_m \circ I_p)$.
   g. $(I_n \circ I_m) \circ T_p = I_n \circ (I_m \circ T_p)$.
   h. $(I_n \circ I_m) \circ I_p = I_n \circ (I_m \circ I_p)$.

   Bukti :

   a. Berdasarkan proposisi 3.2.2

   $$[(T_n \circ T_m) \circ T_p](x) = [T_{n+m} \circ T_p](x)$$
   $$= T_{n+m+p}(x)$$

   dan

   $$[T_n \circ (T_m \circ T_p)](x) = [T_n \circ T_{m+p}](x)$$
   $$= T_{n+m+p}(x).$$

   Akibatnya $[(T_n \circ T_m) \circ T_p](x) = [T_n \circ (T_m \circ T_p)](x)$.

b. Berdasarkanproposisi 3.2.2

$$[(T_n \circ T_m) \circ I_p](x) = [T_{n+m} \circ I_p](x)$$

$$= I_{n+m+p}(x).$$

dan

$$[T_n \circ (T_m \circ T_p)](x) = [T_n \circ I_{m+p}](x)$$

$$= I_{n+m+p}(x).$$

Akibatnya$[(T_n \circ T_m) \circ I_p](x) = [T_n \circ (T_m \circ T_p)](x)$.

c. Berdasarkanproposisi 3.2.2

$$[(T_n \circ I_m) \circ T_p](x) = [I_{m+n} \circ T_p](x)$$

$$= I_{n+m-p}(x).$$

dan

$$[T_n \circ (I_m \circ T_p)](x) = [T_n \circ I_{m-p}](x)$$

$$= I_{n+m-p}(x).$$

Akibatnya$[(T_n \circ I_m) \circ T_p](x) = [T_n \circ (I_m \circ T_p)](x)$.

d. Berdasarkanproposisi 3.2.2

$$[(T_n \circ I_m) \circ I_p](x) = [I_{m+n} \circ I_p](x)$$

$$= T_{n+m-p}(x).$$

dan

$$[T_n \circ (I_m \circ I_p)](x) = [T_n \circ T_{m-p}](x)$$

$= T_{n+m-p}(x).$

Akibatnya$[(T_n \circ I_m) \circ I_p](x) = [T_n \circ (I_m \circ I_p)](x).$

e. Berdasarkanproposisi 3.2.2

$[(I_n \circ T_m) \circ T_p](x) = [I_{n-m} \circ T_p](x)$

$= I_{n-m-p}(x).$

dan

$[I_n \circ (T_m \circ T_p)](x) = [I_n \circ T_{m+p}](x)$

$= I_{n-m-p}(x).$

Akibatnya $[(I_n \circ T_m) \circ T_p](x) = [I_n \circ (T_m \circ T_p)](x).$

f. Berdasarkanproposisi 3.2.2

$[(I_n \circ T_m) \circ I_p](x) = [I_{n-m} \circ I_p](x)$

$= T_{n-m-p}(x).$

dan

$[I_n \circ (T_m \circ I_p)](x) = [I_n \circ I_{m+p}](x)$

$= T_{n-m-p}(x).$

Akibatnya $[(I_n \circ T_m) \circ I_p](x) = [I_n \circ (T_m \circ I_p)](x).$

g. Berdasarkanproposisi 3.2.2

$[(I_n \circ I_m) \circ T_p](x) = [T_{n-m} \circ T_p](x)$

$$= T_{n-m+p}(x).$$

dan

$$[I_n \circ (I_m \circ T_p)](x) = [I_n \circ I_{m-p}](x)$$

$$= T_{n-m+p}(x).$$

Akibatnya $[(I_n \circ I_m) \circ T_p](x) = [I_n \circ (I_m \circ T_p)](x)$.

h. Berdasarkanproposisi 3.2.2

$$[(I_n \circ I_m) \circ I_p](x) = [T_{n-m} \circ I_p](x)$$

$$= I_{n-m+p}(x).$$

dan

$$[I_n \circ (I_m \circ I_p)](x) = [I_n \circ T_{m-p}](x)$$

$$= I_{n-m+p}(x).$$

Akibatnya $[(I_n \circ I_m) \circ I_p](x) = [I_n \circ (I_m \circ I_p)](x)$.

3. G mempunyai unsur identitas.

Akan dibuktikan terdapat $e \in T/I$ sehingga untuk setiap $g \in T/I$ berlaku $g \cdot e = e \cdot g = g$.

Ambil$g \in T/I$ maka g berbentuk T_n atau I_n, berdasarkan prososisi 3.2.2, pilih unsur di T/I yang mengoperasikan T_n atau I_n ke dirinya adalah T_n, $e = T_m$, sehingga berlaku

$$T_n \circ T_m = T_m \circ T_n = T_n$$

$$I_n \circ T_m = T_m \circ I_n = I_n$$

$$T_n \circ T_m = T_{n+m} = T_n$$

Akibatnya $m = 0$.

Jadi unsur identitas di T/I adalah T_0.

4. Setiap unsur di G mempunyai invers.

   Akan dibuktikan untuk setiap $g \in T/I$ berlaku $g \cdot g^{-1} = e$.

   Ambil $g \in T/I$ maka g berbentuk T_n atau I_m.

   Dari (3) diketahui $e = T_0$.

   i. Jika g berbentuk T_m maka $g \cdot g^{-1} = T_m \circ (T_m)^{-1} = T_0$.

      Maka $(T_m)^{-1} = T_p$

      $$T_m \circ T_p = T_0$$

      $$T_{m+p} = T_0.$$

      Akibatnya $p = 12 - m$.

      Jadi $(T_m)^{-1} = T_{12-m}$.

   ii. Jika g berbentuk I_n maka $I_n \circ (I_n)^{-1} = T_0$.

      Untuk setiap I_n , $e = (I_n)^{-1}$.

      $I_n \circ I_m = T_0$

      $T_{n-m} = T_0$

      $n - m = 0$

      $n = m$

      Jadi$(I_n)^{-1} = I_n$

Misalkan$G = \{T_0, T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6, T_7, T_8, T_9, T_{10}, T_{11}, I_0, I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6, I_7, I_8, I_9,$

$I_{10}, I_{11}\}$. Hasil komposisi dari fungsi transposisi dan fungsi inversi dari nada dapat ditentukan sebagai berikut :

Misal : nada $C = \langle 0,4,7 \rangle$

$T_0(C) = T_0\{0,4,7\} = \{(0+0)\text{mod } 12, (4+0)\text{mod } 12, (7+0)\text{mod } 12\} = \langle 0,4,7 \rangle$

$T_1(C) = T_1\{0,4,7\} = \{(0+1)\text{mod } 12, (4+1)\text{mod } 12, (7+1)\text{mod } 12\} = \langle 1,5,8 \rangle$

$T_2(C) = T_2\{0,4,7\} = \{(0+2)\text{mod } 12, (4+2)\text{mod } 12, (7+2)\text{mod } 12\} = \langle 2,6,9 \rangle$

$T_3(C) = T_3\{0,4,7\} = \{(0+3)\text{mod}12, (4+3)\text{mod}12, (7+3)\text{mod}12\} = \langle 3,7,10 \rangle$

$T_4(C) = T_4\{0,4,7\} = \{(0+4)\text{mod}12, (4+4)\text{mod}12, (7+4)\text{mod}12\} = \langle 4,8,11 \rangle$

$T_5(C) = T_5\{0,4,7\} = \{(0+5)\text{mod}12, (4+5)\text{mod}12, (7+5)\text{mod}12\} = \langle 5,9,0 \rangle$

$T_6(C) = T_6\{0,4,7\} = \{(0+6)\text{mod}12, (4+6)\text{mod}12, (7+6)\text{mod}12\} = \langle 6,10,1 \rangle$

$T_7(C) = T_7\{0,4,7\} = \{(0+7)\text{mod}12, (4+7)\text{mod}12, (7+7)\text{mod}12\} = \langle 7,11,2 \rangle$

$T_8(C) = T_8\{0,4,7\} = \{(0+8)\text{mod}12, (4+8)\text{mod}12, (7+8)\text{mod}12\} = \langle 8,0,3 \rangle$

$T_9(C) = T_9\{0,4,7\} = \{(0+9)\text{mod}12, (4+9)\text{mod}12, (7+9)\text{mod}12\} = \langle 9,1,4 \rangle$

$T_{10}(C) = T_{10}\{0,4,7\} = \{(0+10)\text{mod}12, (4+10)\text{mod}12, (7+10)\text{mod}12\}$

$= \langle 10,2,5 \rangle$

$T_{11}(C) = T_{11}\{0,4,7\} = \{(0+11)\text{mod}12, (4+11)\text{mod}12, (7+11)\text{mod}12\}$

$= \langle 11,3,6 \rangle$

$I_0(C) = I_0\{0,4,7\} = \{(-0+0)\text{mod}12, (-4+0)\text{mod}12, (-7+0)\text{mod}12\}$

$= \langle 0,8,5 \rangle$

$I_1(C) = I_1\{0,4,7\} = \{(-0+1)\text{mod}12, (-4+1)\text{mod}12, (-7+1)\text{mod}12\}$

$= \langle 1,9,6 \rangle$

$I_2(C) = I_2\{0,4,7\} = \{(-0+2)\text{mod}12, (-4+2)\text{mod}12, (-7+2)\text{mod}12\}$

$= \langle 2,10,7 \rangle$

$I_3(C) = I_3\{0,4,7\} = \{(-0+3)\text{mod}12, (-4+3)\text{mod}12, (-7+3)\text{mod}12\}$

$= \langle 3,11,8 \rangle$

$I_4(C) = I_4\{0,4,7\} = \{(-0+4)\text{mod}12, (-4+4)\text{mod}12, (-7+4)\text{mod}12\}$

$= \langle 4,0,9 \rangle$

$I_5(C) = I_5\{0,4,7\} = \{(-0+5)\text{mod}12, (-4+5)\text{mod}12, (-7+5)\text{mod}12\}$

$= \langle 5,1,10 \rangle$

$I_6(C) = I_6\{0,4,7\} = \{(-0+6)\text{mod}12, (-4+6)\text{mod}12, (-7+6)\text{mod}12\}$

$= \langle 6,2,11 \rangle$

$I_7(C) = I_7\{0,4,7\} = \{(-0+7)\text{mod}12, (-4+7)\text{mod}12, (-7+7)\text{mod}12\}$

$= \langle 7,3,0 \rangle$

$I_8(C) = I_8\{0,4,7\} = \{(-0+8)\text{mod}12, (-4+8)\text{mod}12, (-7+8)\text{mod}12\}$

$= \langle 8,4,1 \rangle$

$I_9(C) = I_9\{0,4,7\} = \{(-0+9)\text{mod}12, (-4+9)\text{mod}12, (-7+9)\text{mod}12\}$

$= \langle 9,5,2 \rangle$

$I_{10}(C) = I_{10}\{0,4,7\} = \{(-0+10)\text{mod}12, (-4+10)\text{mod}12, (-7+10)\text{mod}12\}$

$= \langle 10,6,3 \rangle$

$I_{11}(C) = I_{11}\{0,4,7\} = \{(-0+11)\text{mod}12, (-4+11)\text{mod}12, (-7+11)\text{mod}12\}$

$= \langle 11,7,4 \rangle$

Hasil komposisi dari fungsi transposisi di atas adalah :

$T_0(C) \circ T_0(C) = T_0\{T_0(C)\} = T_0\{0,4,7\} = \langle 0,4,7 \rangle = T_0(C)$

$T_1(C) \circ T_0(C) = T_1\{T_0(C)\} = T_1\{0,4,7\} = \langle 1,5,8 \rangle = T_1(C)$

$T_2(C) \circ T_0(C) = T_2\{T_0(C)\} = T_2\{0,4,7\} = \langle 2,6,9 \rangle = T_2(C)$

$T_3(C) \circ T_0(C) = T_3\{T_0(C)\} = T_3\{0,4,7\} = \langle 3,7,10 \rangle = T_3(C)$

$T_4(C) \circ T_0(C) = T_4\{T_0(C)\} = T_4\{0,4,7\} = \langle 4,8,11 \rangle = T_4(C)$

$T_5(C) \circ T_0(C) = T_5\{T_0(C)\} = T_5\{0,4,7\} = \langle 5,9,0 \rangle = T_5(C)$

$\vdots$

$T_0(C) \circ T_1(C) = T_0\{T_1(C)\} = T_0\{1,5,8\} = \langle 1,5,8 \rangle = T_1(C)$

$T_1(C) \circ T_1(C) = T_1\{T_1(C)\} = T_1\{1,5,8\} = \langle 2,6,9 \rangle = T_2(C)$

$T_2(C) \circ T_1(C) = T_2\{T_1(C)\} = T_2\{1,5,8\} = \langle 3,7,10 \rangle = T_3(C)$

$T_3(C) \circ T_1(C) = T_3\{T_1(C)\} = T_3\{1,5,8\} = \langle 4,8,11 \rangle = T_4(C)$

$T_4(C) \circ T_1(C) = T_4\{T_1(C)\} = T_4\{1,5,8\} = \langle 5,9,0 \rangle = T_5(C)$

$T_5(C) \circ T_1(C) = T_5\{T_1(C)\} = T_5\{1,5,8\} = \langle 6,10,1 \rangle = T_6(C)$

$\vdots$

$T_0(C) \circ T_2(C) = T_0\{T_2(C)\} = T_0\{2,6,9\} = \langle 2,6,9 \rangle = T_2(C)$

$T_1(C) \circ T_2(C) = T_1\{T_2(C)\} = T_1\{2,6,9\} = \langle 3,7,10 \rangle = T_3(C)$

$T_2(C) \circ T_2(C) = T_2\{T_2(C)\} = T_2\{2,6,9\} = \langle 4,8,11 \rangle = T_4(C)$

$T_3(C) \circ T_2(C) = T_3\{T_2(C)\} = T_3\{2,6,9\} = \langle 5,9,0 \rangle = T_5(C)$

$T_4(C) \circ T_2(C) = T_4\{T_2(C)\} = T_4\{2,6,9\} = \langle 6,10,1 \rangle = T_6(C)$

$T_5(C) \circ T_2(C) = T_5\{T_2(C)\} = T_5\{2,6,9\} = \langle 7,11,2 \rangle = T_7(C)$

$\vdots$

$T_0(C) \circ T_3(C) = T_0\{T_3(C)\} = T_0\{3,7,10\} = \langle 3,7,10 \rangle = T_3(C)$

$T_1(C) \circ T_3(C) = T_1\{T_3(C)\} = T_1\{3,7,10\} = \langle 4,8,11 \rangle = T_4(C)$

$T_2(C) \circ T_3(C) = T_2\{T_3(C)\} = T_2\{3,7,10\} = \langle 5,9,0 \rangle = T_5(C)$

$T_3(C) \circ T_3(C) = T_3\{T_3(C)\} = T_3\{3,7,10\} = \langle 6,10,1 \rangle = T_6(C)$

$T_4(C) \circ T_3(C) = T_4\{T_3(C)\} = T_4\{3,7,10\} = \langle 7,11,2 \rangle = T_7(C)$

$T_5(C) \circ T_3(C) = T_5\{T_3(C)\} = T_5\{3,7,10\} = \langle 8,0,3 \rangle = T_8(C)$

$\vdots$

$T_0(C) \circ T_4(C) = T_0\{T_4(C)\} = T_0\{4,8,11\} = \langle 4,8,11 \rangle = T_4(C)$

$T_1(C) \circ T_4(C) = T_1\{T_4(C)\} = T_1\{4,8,11\} = \langle 5,9,0 \rangle = T_5(C)$

$T_2(C) \circ T_4(C) = T_2\{T_4(C)\} = T_2\{4,8,11\} = \langle 6,10,1 \rangle = T_6(C)$

$T_3(C) \circ T_4(C) = T_3\{T_4(C)\} = T_3\{4,8,11\} = \langle 7,11,2 \rangle = T_7(C)$

$T_4(C) \circ T_4(C) = T_4\{T_4(C)\} = T_4\{4,8,11\} = \langle 8,0,3 \rangle = T_8(C)$

$T_5(C) \circ T_4(C) = T_5\{T_4(C)\} = T_5\{4,8,11\} = \langle 9,1,4 \rangle = T_9(C)$

$\vdots$

$T_0(C) \circ T_5(C) = T_0\{T_5(C)\} = T_0\{5,9,0\} = \langle 5,9,0 \rangle = T_5(C)$

$T_1(C) \circ T_5(C) = T_1\{T_5(C)\} = T_1\{5,9,0\} = \langle 6,10,1 \rangle = T_6(C)$

$T_2(C) \circ T_5(C) = T_2\{T_5(C)\} = T_2\{5,9,0\} = \langle 7,11,2 \rangle = T_7(C)$

$T_3(C) \circ T_5(C) = T_3\{T_5(C)\} = T_3\{5,9,0\} = \langle 8,0,3 \rangle = T_8(C)$

$T_4(C) \circ T_5(C) = T_4\{T_5(C)\} = T_4\{5,9,0\} = \langle 9,1,4 \rangle = T_9(C)$

$T_5(C) \circ T_5(C) = T_5\{T_5(C)\} = T_5\{5,9,0\} = \langle 10,2,5 \rangle = T_{10}(C)$

$\vdots$

$T_0(C) \circ T_6(C) = T_0\{T_6(C)\} = T_0\{6,10,1\} = \langle 6,10,1 \rangle = T_6(C)$

$T_1(C) \circ T_6(C) = T_1\{T_6(C)\} = T_1\{6,10,1\} = \langle 7,11,2 \rangle = T_7(C)$

$T_2(C) \circ T_6(C) = T_2\{T_6(C)\} = T_2\{6,10,1\} = \langle 8,0,3 \rangle = T_8(C)$

$T_3(C) \circ T_6(C) = T_3\{T_6(C)\} = T_3\{6,10,1\} = \langle 9,1,4\rangle = T_9(C)$

$T_4(C) \circ T_6(C) = T_4\{T_6(C)\} = T_4\{6,10,1\} = \langle 10,2,5\rangle = T_{10}(C)$

$T_5(C) \circ T_6(C) = T_5\{T_6(C)\} = T_5\{6,10,1\} = \langle 11,3,6\rangle = T_{11}(C)$

$\vdots$

$T_0(C) \circ T_7(C) = T_0\{T_7(C)\} = T_0\{7,11,2\} = \langle 7,11,2\rangle = T_7(C)$

$T_1(C) \circ T_7(C) = T_1\{T_7(C)\} = T_1\{7,11,2\} = \langle 8,0,3\rangle = T_8(C)$

$T_2(C) \circ T_7(C) = T_2\{T_7(C)\} = T_2\{7,11,2\} = \langle 9,1,4\rangle = T_9(C)$

$T_3(C) \circ T_7(C) = T_3\{T_7(C)\} = T_3\{7,11,2\} = \langle 10,2,5\rangle = T_{10}(C)$

$T_4(C) \circ T_7(C) = T_4\{T_7(C)\} = T_4\{7,11,2\} = \langle 11,3,6\rangle = T_{11}(C)$

$T_5(C) \circ T_7(C) = T_5\{T_7(C)\} = T_5\{7,11,2\} = \langle 0,4,7\rangle = T_0(C)$

$\vdots$

$T_0(C) \circ T_8(C) = T_0\{T_8(C)\} = T_0\{8,0,3\} = \langle 8,0,3\rangle = T_8(C)$

$T_1(C) \circ T_8(C) = T_1\{T_8(C)\} = T_1\{8,0,3\} = \langle 9,1,4\rangle = T_9(C)$

$T_2(C) \circ T_8(C) = T_2\{T_8(C)\} = T_2\{8,0,3\} = \langle 10,2,5\rangle = T_{10}(C)$

$T_3(C) \circ T_8(C) = T_3\{T_8(C)\} = T_3\{8,0,3\} = \langle 11,3,6\rangle = T_{11}(C)$

$T_4(C) \circ T_8(C) = T_4\{T_8(C)\} = T_4\{8,0,3\} = \langle 0,4,7\rangle = T_0(C)$

$T_5(C) \circ T_8(C) = T_5\{T_8(C)\} = T_5\{8,0,3\} = \langle 1,5,8\rangle = T_1(C)$

$\vdots$

$T_0(C) \circ T_9(C) = T_0\{T_9(C)\} = T_0\{9,1,4\} = \langle 9,1,4\rangle = T_9(C)$

$T_1(C) \circ T_9(C) = T_1\{T_9(C)\} = T_1\{9,1,4\} = \langle 10,2,5\rangle = T_{10}(C)$

$T_2(C) \circ T_9(C) = T_2\{T_9(C)\} = T_2\{9,1,4\} = \langle 11,3,6\rangle = T_{11}(C)$

$T_3(C) \circ T_9(C) = T_3\{T_9(C)\} = T_3\{9,1,4\} = \langle 0,4,7\rangle = T_0(C)$

$T_4(C) \circ T_9(C) = T_4\{T_9(C)\} = T_4\{9,1,4\} = \langle 1,5,8 \rangle = T_1(C)$

$T_5(C) \circ T_9(C) = T_5\{T_9(C)\} = T_5\{9,1,4\} = \langle 2,6,9 \rangle = T_2(C)$

$\vdots$

$T_0(C) \circ T_{10}(C) = T_0\{T_{10}(C)\} = T_0\{10,2,5\} = \langle 10,2,5 \rangle = T_{10}(C)$

$T_1(C) \circ T_{10}(C) = T_1\{T_{10}(C)\} = T_1\{10,2,5\} = \langle 11,3,6 \rangle = T_{11}(C)$

$T_2(C) \circ T_{10}(C) = T_2\{T_{10}(C)\} = T_2\{10,2,5\} = \langle 0,4,7 \rangle = T_0(C)$

$T_3(C) \circ T_{10}(C) = T_3\{T_{10}(C)\} = T_3\{10,2,5\} = \langle 1,5,8 \rangle = T_1(C)$

$T_4(C) \circ T_{10}(C) = T_4\{T_{10}(C)\} = T_4\{10,2,5\} = \langle 2,6,9 \rangle = T_2(C)$

$T_5(C) \circ T_{10}(C) = T_5\{T_{10}(C)\} = T_5\{10,2,5\} = \langle 3,7,10 \rangle = T_3(C)$

$\vdots$

$T_0(C) \circ T_{11}(C) = T_0\{T_{11}(C)\} = T_0\{11,3,6\} = \langle 11,3,6 \rangle = T_{11}(C)$

$T_1(C) \circ T_{11}(C) = T_1\{T_{11}(C)\} = T_1\{11,3,6\} = \langle 0,4,7 \rangle = T_0(C)$

$T_2(C) \circ T_{11}(C) = T_2\{T_{11}(C)\} = T_2\{11,3,6\} = \langle 1,5,8 \rangle = T_1(C)$

$T_3(C) \circ T_{11}(C) = T_3\{T_{11}(C)\} = T_3\{11,3,6\} = \langle 2,6,9 \rangle = T_2(C)$

$T_4(C) \circ T_{11}(C) = T_4\{T_{11}(C)\} = T_4\{11,3,6\} = \langle 3,7,10 \rangle = T_3(C)$

$T_5(C) \circ T_{11}(C) = T_5\{T_{11}(C)\} = T_5\{11,3,6\} = \langle 4,8,11 \rangle = T_4(C)$

$\vdots$

Hasil komposisi dari fungsi transposisi dan fungsi inversi adalah :

$T_0(C) \circ I_0(C) = T_0\{I_0(C)\} = T_0\{0,8,5\} = \langle 0,8,5 \rangle = I_0(C)$

$T_1(C) \circ I_0(C) = T_1\{I_0(C)\} = T_1\{0,8,5\} = \langle 1,9,6 \rangle = I_1(C)$

$T_2(C) \circ I_0(C) = T_2\{I_0(C)\} = T_2\{0,8,5\} = \langle 2,10,7 \rangle = I_2(C)$

$T_3(C) \circ I_0(C) = T_3\{I_0(C)\} = T_3\{0,8,5\} = \langle 3,11,8 \rangle = I_3(C)$

$T_4(C) \circ I_0(C) = T_4\{I_0(C)\} = T_4\{0,8,5\} = \langle 4,0,9 \rangle = I_4(C)$

$T_5(C) \circ I_0(C) = T_5\{I_0(C)\} = T_5\{0,8,5\} = \langle 5,1,10 \rangle = I_5(C)$

$\vdots$

$T_0(C) \circ I_1(C) = T_0\{I_1(C)\} = T_0\{1,9,6\} = \langle 1,9,6 \rangle = I_1(C)$

$T_1(C) \circ I_1(C) = T_1\{I_1(C)\} = T_1\{1,9,6\} = \langle 2,10,7 \rangle = I_2(C)$

$T_2(C) \circ I_1(C) = T_2\{I_1(C)\} = T_2\{1,9,6\} = \langle 3,11,8 \rangle = I_3(C)$

$T_3(C) \circ I_1(C) = T_3\{I_1(C)\} = T_3\{1,9,6\} = \langle 4,0,9 \rangle = I_4(C)$

$T_4(C) \circ I_1(C) = T_4\{I_1(C)\} = T_4\{1,9,6\} = \langle 5,1,10 \rangle = I_5(C)$

$T_5(C) \circ I_1(C) = T_5\{I_1(C)\} = T_5\{1,9,6\} = \langle 6,2,11 \rangle = I_6(C)$

$\vdots$

$T_0(C) \circ I_2(C) = T_0\{I_2(C)\} = T_0\{2,10,7\} = \langle 2,10,7 \rangle = I_2(C)$

$T_1(C) \circ I_2(C) = T_1\{I_2(C)\} = T_1\{2,10,7\} = \langle 3,11,8 \rangle = I_3(C)$

$T_2(C) \circ I_2(C) = T_2\{I_2(C)\} = T_2\{2,10,7\} = \langle 4,0,9 \rangle = I_4(C)$

$T_3(C) \circ I_2(C) = T_3\{I_2(C)\} = T_3\{2,10,7\} = \langle 5,1,10 \rangle = I_5(C)$

$T_4(C) \circ I_2(C) = T_4\{I_2(C)\} = T_4\{2,10,7\} = \langle 6,2,11 \rangle = I_6(C)$

$T_5(C) \circ I_2(C) = T_5\{I_2(C)\} = T_5\{2,10,7\} = \langle 7,3,0 \rangle = I_7(C)$

$\vdots$

$T_0(C) \circ I_3(C) = T_0\{I_3(C)\} = T_0\{3,11,8\} = \langle 3,11,8 \rangle = I_3(C)$

$T_1(C) \circ I_3(C) = T_1\{I_3(C)\} = T_1\{3,11,8\} = \langle 4,0,9 \rangle = I_4(C)$

$T_2(C) \circ I_3(C) = T_2\{I_3(C)\} = T_2\{3,11,8\} = \langle 5,1,10 \rangle = I_5(C)$

$T_3(C) \circ I_3(C) = T_3\{I_3(C)\} = T_3\{3,11,8\} = \langle 6,2,11 \rangle = I_6(C)$

$T_4(C) \circ I_3(C) = T_4\{I_3(C)\} = T_4\{3,11,8\} = \langle 7,3,0 \rangle = I_7(C)$

$T_5(C) \circ I_3(C) = T_5\{I_3(C)\} = T_5\{3,11,8\} = \langle 8,4,1 \rangle = I_8(C)$

$\vdots$

$T_0(C) \circ I_4(C) = T_0\{I_4(C)\} = T_0\{4,0,9\} = \langle 4,0,9 \rangle = I_4(C)$

$T_1(C) \circ I_4(C) = T_1\{I_4(C)\} = T_1\{4,0,9\} = \langle 5,1,10 \rangle = I_5(C)$

$T_2(C) \circ I_4(C) = T_2\{I_4(C)\} = T_2\{4,0,9\} = \langle 6,2,11 \rangle = I_6(C)$

$T_3(C) \circ I_4(C) = T_3\{I_4(C)\} = T_3\{4,0,9\} = \langle 7,3,0 \rangle = I_7(C)$

$T_4(C) \circ I_4(C) = T_4\{I_4(C)\} = T_4\{4,0,9\} = \langle 8,4,1 \rangle = I_8(C)$

$T_5(C) \circ I_4(C) = T_5\{I_4(C)\} = T_5\{4,0,9\} = \langle 9,5,2 \rangle = I_9(C)$

$\vdots$

$T_0(C) \circ I_5(C) = T_0\{I_5(C)\} = T_0\{5,1,10\} = \langle 5,1,10 \rangle = I_5(C)$

$T_1(C) \circ I_5(C) = T_1\{I_5(C)\} = T_1\{5,1,10\} = \langle 6,2,11 \rangle = I_6(C)$

$T_2(C) \circ I_5(C) = T_2\{I_5(C)\} = T_2\{5,1,10\} = \langle 7,3,0 \rangle = I_7(C)$

$T_3(C) \circ I_5(C) = T_3\{I_5(C)\} = T_3\{5,1,10\} = \langle 8,4,1 \rangle = I_8(C)$

$T_4(C) \circ I_5(C) = T_4\{I_5(C)\} = T_4\{5,1,10\} = \langle 9,5,2 \rangle = I_9(C)$

$T_5(C) \circ I_5(C) = T_5\{I_5(C)\} = T_{05}\{5,1,10\} = \langle 10,6,3 \rangle = I_{10}(C)$

$\vdots$

$T_0(C) \circ I_6(C) = T_0\{I_6(C)\} = T_0\{6,2,11\} = \langle 6,2,11 \rangle = I_6(C)$

$T_1(C) \circ I_6(C) = T_1\{I_6(C)\} = T_1\{6,2,11\} = \langle 7,3,0 \rangle = I_7(C)$

$T_2(C) \circ I_6(C) = T_2\{I_6(C)\} = T_2\{6,2,11\} = \langle 8,4,1 \rangle = I_8(C)$

$T_3(C) \circ I_6(C) = T_3\{I_6(C)\} = T_3\{6,2,11\} = \langle 9,5,2 \rangle = I_9(C)$

$T_4(C) \circ I_6(C) = T_4\{I_6(C)\} = T_4\{6,2,11\} = \langle 10,6,3 \rangle = I_{10}(C)$

$T_5(C) \circ I_6(C) = T_5\{I_6(C)\} = 5\{6,2,11\} = \langle 11,7,4 \rangle = I_{11}(C)$

$\vdots$

$$T_0(C) \circ I_7(C) = T_0\{I_7(C)\} = T_0\{7,3,0\} = \langle 7,3,0 \rangle = I_7(C)$$

$$T_1(C) \circ I_7(C) = T_1\{I_7(C)\} = T_1\{7,3,0\} = \langle 8,4,1 \rangle = I_8(C)$$

$$T_2(C) \circ I_7(C) = T_2\{I_7(C)\} = T_2\{7,3,0\} = \langle 9,5,2 \rangle = I_9(C)$$

$$T_3(C) \circ I_7(C) = T_3\{I_7(C)\} = T_3\{7,3,0\} = \langle 10,6,3 \rangle = I_{10}(C)$$

$$T_4(C) \circ I_7(C) = T_4\{I_7(C)\} = T_4\{7,3,0\} = \langle 11,7,4 \rangle = I_{11}(C)$$

$$T_5(C) \circ I_7(C) = T_5\{I_7(C)\} = T_5\{7,3,0\} = \langle 0,8,5 \rangle = I_0(C)$$

$\vdots$

$$T_0(C) \circ I_8(C) = T_0\{I_8(C)\} = T_0\{8,4,1\} = \langle 8,4,1 \rangle = I_8(C)$$

$$T_1(C) \circ I_8(C) = T_1\{I_8(C)\} = T_1\{8,4,1\} = \langle 9,5,2 \rangle = I_9(C)$$

$$T_2(C) \circ I_8(C) = T_2\{I_8(C)\} = T_2\{8,4,1\} = \langle 10,6,3 \rangle = I_{10}(C)$$

$$T_3(C) \circ I_8(C) = T_3\{I_8(C)\} = T_3\{8,4,1\} = \langle 11,7,4 \rangle = I_{11}(C)$$

$$T_4(C) \circ I_8(C) = T_4\{I_8(C)\} = T_4\{8,4,1\} = \langle 0,8,5 \rangle = I_0(C)$$

$$T_5(C) \circ I_8(C) = T_5\{I_8(C)\} = T_5\{8,4,1\} = \langle 1,9,6 \rangle = I_1(C)$$

$\vdots$

$$T_0(C) \circ I_9(C) = T_0\{I_9(C)\} = T_0\{9,5,2\} = \langle 9,5,2 \rangle = I_9(C)$$

$$T_1(C) \circ I_9(C) = T_1\{I_9(C)\} = T_1\{9,5,2\} = \langle 10,6,3 \rangle = I_{10}(C)$$

$$T_2(C) \circ I_9(C) = T_2\{I_9(C)\} = T_2\{9,5,2\} = \langle 11,7,4 \rangle = I_{11}(C)$$

$$T_3(C) \circ I_9(C) = T_3\{I_9(C)\} = T_3\{9,5,2\} = \langle 0,8,5 \rangle = I_0(C)$$

$$T_4(C) \circ I_9(C) = T_4\{I_9(C)\} = T_4\{9,5,2\} = \langle 1,9,6 \rangle = I_1(C)$$

$$T_5(C) \circ I_9(C) = T_5\{I_9(C)\} = T_5\{9,5,2\} = \langle 2,10,7 \rangle = I_2(C)$$

$\vdots$

$T_0(C) \circ I_{10}(C) = T_0\{I_{10}(C)\} = T_0\{10,6,3\} = \langle 10,6,3 \rangle = I_{10}(C)$

$T_1(C) \circ I_{10}(C) = T_1\{I_{10}(C)\} = T_1\{10,6,3\} = \langle 11,7,4 \rangle = I_{11}(C)$

$T_2(C) \circ I_{10}(C) = T_2\{I_{10}(C)\} = T_2\{10,6,3\} = \langle 0,8,5 \rangle = I_0(C)$

$T_3(C) \circ I_{10}(C) = T_3\{I_{10}(C)\} = T_3\{10,6,3\} = \langle 1,9,6 \rangle = I_1(C)$

$T_4(C) \circ I_{10}(C) = T_4\{I_{10}(C)\} = T_4\{10,6,3\} = \langle 2,10,7 \rangle = I_2(C)$

$T_5(C) \circ I_{10}(C) = T_5\{I_{10}(C)\} = T_5\{10,6,3\} = \langle 3,11,8 \rangle = I_3(C)$

$\vdots$

$T_0(C) \circ I_{11}(C) = T_0\{I_{11}(C)\} = T_0\{11,7,4\} = \langle 11,7,4 \rangle = I_{11}(C)$

$T_1(C) \circ I_{11}(C) = T_1\{I_{11}(C)\} = T_1\{11,7,4\} = \langle 0,8,5 \rangle = I_0(C)$

$T_2(C) \circ I_{11}(C) = T_2\{I_{11}(C)\} = T_2\{11,7,4\} = \langle 1,9,6 \rangle = I_1(C)$

$T_3(C) \circ I_{11}(C) = T_3\{I_{11}(C)\} = T_3\{11,7,4\} = \langle 2,10,7 \rangle = I_2(C)$

$T_4(C) \circ I_{11}(C) = T_4\{I_{11}(C)\} = T_4\{11,7,4\} = \langle 3,11,8 \rangle = I_3(C)$

$T_5(C) \circ I_{11}(C) = T_5\{I_{11}(C)\} = T_5\{11,7,4\} = \langle 4,0,9 \rangle = I_4(C)$

$\vdots$

Hasil komposisi dari fungsi inversi dan fungsi transposisi ;

$I_0(C) \circ T_0(C) = I_0\{T_0(C)\} = I_0\{0,4,7\} = \langle 0,8,5 \rangle = I_0(C)$

$I_1(C) \circ T_0(C) = I_1\{T_0(C)\} = I_1\{0,4,7\} = \langle 1,9,6 \rangle = I_1(C)$

$I_2(C) \circ T_0(C) = I_2\{T_0(C)\} = I_2\{0,4,7\} = \langle 2,10,7 \rangle = I_2(C)$

$I_3(C) \circ T_0(C) = I_3\{T_0(C)\} = I_3\{0,4,7\} = \langle 3,11,8 \rangle = I_3(C)$

$I_4(C) \circ T_0(C) = I_4\{T_0(C)\} = I_4\{0,4,7\} = \langle 4,0,9 \rangle = I_4(C)$

$I_5(C) \circ T_0(C) = I_5\{T_0(C)\} = I_5\{0,4,7\} = \langle 5,1,10 \rangle = I_5(C)$

$\vdots$

$I_0(C) \circ T_1(C) = I_0\{T_1(C)\} = I_0\{1,5,8\} = \langle 11,7,4 \rangle = I_{11}(C)$

$I_1(C) \circ T_1(C) = I_1\{T_1(C)\} = I_1\{1,5,8\} = \langle 0,8,5 \rangle = I_0(C)$

$I_2(C) \circ T_1(C) = I_2\{T_1(C)\} = I_2\{1,5,8\} = \langle 1,9,6 \rangle = I_1(C)$

$I_3(C) \circ T_1(C) = I_3\{T_1(C)\} = I_3\{1,5,8\} = \langle 2,10,7 \rangle = I_2(C)$

$I_4(C) \circ T_1(C) = I_4\{T_1(C)\} = I_4\{1,5,8\} = \langle 3,11,8 \rangle = I_3(C)$

$I_5(C) \circ T_1(C) = I_5\{T_1(C)\} = I_5\{1,5,8\} = \langle 4,0,9 \rangle = I_4(C)$

$\vdots$

$I_0(C) \circ T_2(C) = I_0\{T_2(C)\} = I_0\{2,6,9\} = \langle 10,6,3 \rangle = I_{10}(C)$

$I_1(C) \circ T_2(C) = I_1\{T_2(C)\} = I_1\{2,6,9\} = \langle 11,7,4 \rangle = I_{11}(C)$

$I_2(C) \circ T_2(C) = I_2\{T_2(C)\} = I_2\{2,6,9\} = \langle 0,8,5 \rangle = I_0(C)$

$I_3(C) \circ T_2(C) = I_3\{T_2(C)\} = I_3\{2,6,9\} = \langle 1,9,6 \rangle = I_1(C)$

$I_4(C) \circ T_2(C) = I_4\{T_2(C)\} = I_4\{2,6,9\} = \langle 2,10,7 \rangle = I_2(C)$

$I_5(C) \circ T_2(C) = I_5\{T_2(C)\} = I_5\{2,6,9\} = \langle 3,11,8 \rangle = I_3(C)$

$\vdots$

$I_0(C) \circ T_3(C) = I_0\{T_3(C)\} = I_0\{3,7,10\} = \langle 9,5,2 \rangle = I_9(C)$

$I_1(C) \circ T_3(C) = I_1\{T_3(C)\} = I_1\{3,7,10\} = \langle 10,6,3 \rangle = I_{10}(C)$

$I_2(C) \circ T_3(C) = I_2\{T_3(C)\} = I_2\{3,7,10\} = \langle 11,7,4 \rangle = I_{11}(C)$

$I_3(C) \circ T_3(C) = I_3\{T_3(C)\} = I_3\{3,7,10\} = \langle 0,8,5 \rangle = I_0(C)$

$I_4(C) \circ T_3(C) = I_4\{T_3(C)\} = I_4\{3,7,10\} = \langle 1,9,6 \rangle = I_1(C)$

$I_5(C) \circ T_3(C) = I_5\{T_3(C)\} = I_5\{3,7,10\} = \langle 2,10,7 \rangle = I_2(C)$

$\vdots$

$I_0(C) \circ T_4(C) = I_0\{T_4(C)\} = I_0\{4,8,11\} = \langle 8,4,1 \rangle = I_8(C)$

$$I_1(C) \circ T_4(C) = I_1\{T_4(C)\} = I_1\{4,8,11\} = \langle 9,5,2 \rangle = I_9(C)$$

$$I_2(C) \circ T_4(C) = I_2\{T_4(C)\} = I_2\{4,8,11\} = \langle 10,6,3 \rangle = I_{10}(C)$$

$$I_3(C) \circ T_4(C) = I_3\{T_4(C)\} = I_3\{4,8,11\} = \langle 11,7,4 \rangle = I_{11}(C)$$

$$I_4(C) \circ T_4(C) = I_4\{T_4(C)\} = I_4\{4,8,11\} = \langle 0,8,5 \rangle = I_0(C)$$

$$I_5(C) \circ T_4(C) = I_5\{T_4(C)\} = I_5\{4,8,11\} = \langle 1,9,6 \rangle = I_1(C)$$

$\vdots$

$$I_0(C) \circ T_5(C) = I_0\{T_5(C)\} = I_0\{5,9,0\} = \langle 7,3,0 \rangle = I_7(C)$$

$$I_1(C) \circ T_5(C) = I_1\{T_5(C)\} = I_1\{5,9,0\} = \langle 8,4,1 \rangle = I_8(C)$$

$$I_2(C) \circ T_5(C) = I_2\{T_5(C)\} = I_2\{5,9,0\} = \langle 9,5,2 \rangle = I_9(C)$$

$$I_3(C) \circ T_5(C) = I_3\{T_5(C)\} = I_3\{5,9,0\} = \langle 10,6,3 \rangle = I_{10}(C)$$

$$I_4(C) \circ T_5(C) = I_4\{T_5(C)\} = I_4\{5,9,0\} = \langle 11,7,4 \rangle = I_{11}(C)$$

$$I_5(C) \circ T_5(C) = I_5\{T_5(C)\} = I_5\{5,9,0\} = \langle 0,8,5 \rangle = I_0(C)$$

$\vdots$

$$I_0(C) \circ T_6(C) = I_0\{T_6(C)\} = I_0\{6,10,1\} = \langle 6,2,11 \rangle = I_6(C)$$

$$I_1(C) \circ T_6(C) = I_1\{T_6(C)\} = I_1\{6,10,1\} = \langle 7,3,0 \rangle = I_7(C)$$

$$I_2(C) \circ T_6(C) = I_2\{T_6(C)\} = I_2\{6,10,1\} = \langle 8,4,1 \rangle = I_8(C)$$

$$I_3(C) \circ T_6(C) = I_3\{T_6(C)\} = I_3\{6,10,1\} = \langle 9,5,0 \rangle = I_9(C)$$

$$I_4(C) \circ T_6(C) = I_4\{T_6(C)\} = I_4\{6,10,1\} = \langle 10,6,1 \rangle = I_{10}(C)$$

$$I_5(C) \circ T_6(C) = I_5\{T_6(C)\} = I_5\{6,10,1\} = \langle 11,7,2 \rangle = I_{11}(C)$$

$\vdots$

$$I_0(C) \circ T_7(C) = I_0\{T_7(C)\} = I_0\{7,11,2\} = \langle 5,1,10 \rangle = I_5(C)$$

$$I_1(C) \circ T_7(C) = I_1\{T_7(C)\} = I_1\{7,11,2\} = \langle 6,2,11 \rangle = I_6(C)$$

$I_2(C) \circ T_7(C) = I_2\{T_7(C)\} = I_2\{7,11,2\} = \langle 7,3,0 \rangle = I_7(C)$

$I_3(C) \circ T_7(C) = I_3\{T_7(C)\} = I_3\{7,11,2\} = \langle 8,4,1 \rangle = I_8(C)$

$I_4(C) \circ T_7(C) = I_4\{T_7(C)\} = I_4\{7,11,2\} = \langle 9,5,2 \rangle = I_9(C)$

$I_5(C) \circ T_7(C) = I_5\{T_7(C)\} = I_5\{7,11,2\} = \langle 10,6,3 \rangle = I_{10}(C)$

$\vdots$

$I_0(C) \circ T_8(C) = I_0\{T_8(C)\} = I_0\{8,0,3\} = \langle 4,0,9 \rangle = I_4(C)$

$I_1(C) \circ T_8(C) = I_1\{T_8(C)\} = I_1\{8,0,3\} = \langle 5,1,10 \rangle = I_5(C)$

$I_2(C) \circ T_8(C) = I_2\{T_8(C)\} = I_2\{8,0,3\} = \langle 6,2,11 \rangle = I_6(C)$

$I_3(C) \circ T_8(C) = I_3\{T_8(C)\} = I_3\{8,0,3\} = \langle 7,3,0 \rangle = I_7(C)$

$I_4(C) \circ T_8(C) = I_4\{T_8(C)\} = I_4\{8,0,3\} = \langle 8,4,1 \rangle = I_8(C)$

$I_5(C) \circ T_8(C) = I_5\{T_8(C)\} = I_5\{8,0,3\} = \langle 9,5,2 \rangle = I_9(C)$

$\vdots$

$I_0(C) \circ T_9(C) = I_0\{T_9(C)\} = I_0\{9,1,4\} = \langle 3,11,8 \rangle = I_3(C)$

$I_1(C) \circ T_9(C) = I_1\{T_9(C)\} = I_1\{9,1,4\} = \langle 4,0,9 \rangle = I_4(C)$

$I_2(C) \circ T_9(C) = I_2\{T_9(C)\} = I_2\{9,1,4\} = \langle 5,1,10 \rangle = I_5(C)$

$I_3(C) \circ T_9(C) = I_3\{T_9(C)\} = I_3\{9,1,4\} = \langle 6,2,11 \rangle = I_6(C)$

$I_4(C) \circ T_9(C) = I_4\{T_9(C)\} = I_4\{9,1,4\} = \langle 7,3,0 \rangle = I_7(C)$

$I_5(C) \circ T_9(C) = I_5\{T_9(C)\} = I_5\{9,1,4\} = \langle 8,4,1 \rangle = I_8(C)$

$\vdots$

$I_0(C) \circ T_{10}(C) = I_0\{T_{10}(C)\} = I_0\{10,2,5\} = \langle 2,10,7 \rangle = I_2(C)$

$I_1(C) \circ T_{10}(C) = I_1\{T_{10}(C)\} = I_1\{10,2,5\} = \langle 3,11,8 \rangle = I_3(C)$

$I_2(C) \circ T_{10}(C) = I_2\{T_{10}(C)\} = I_2\{10,2,5\} = \langle 4,0,9 \rangle = I_4(C)$

$I_3(C) \circ T_{10}(C) = I_3\{T_{10}(C)\} = I_3\{10,2,5\} = \langle 5,1,10 \rangle = I_5(C)$

$I_4(C) \circ T_{10}(C) = I_4\{T_{10}(C)\} = I_4\{10,2,5\} = \langle 6,2,11 \rangle = I_6(C)$

$I_5(C) \circ T_{10}(C) = I_5\{T_{10}(C)\} = I_5\{10,2,5\} = \langle 7,3,0 \rangle = I_7(C)$

$\vdots$

$I_0(C) \circ T_{11}(C) = I_0\{T_{11}(C)\} = I_0\{11,3,6\} = \langle 1,9,6 \rangle = I_1(C)$

$I_1(C) \circ T_{11}(C) = I_1\{T_{11}(C)\} = I_1\{11,3,6\} = \langle 2,10,7 \rangle = I_2(C)$

$I_2(C) \circ T_{11}(C) = I_2\{T_{11}(C)\} = I_2\{11,3,6\} = \langle 3,11,8 \rangle = I_3(C)$

$I_3(C) \circ T_{11}(C) = I_3\{T_{11}(C)\} = I_3\{11,3,6\} = \langle 4,0,9 \rangle = I_4(C)$

$I_4(C) \circ T_{11}(C) = I_4\{T_{11}(C)\} = I_4\{11,3,6\} = \langle 5,1,10 \rangle = I_5(C)$

$I_5(C) \circ T_{11}(C) = I_5\{T_{11}(C)\} = I_5\{11,3,6\} = \langle 6,2,11 \rangle = I_6(C)$

$\vdots$

Hasil komposisi dari fungsi inversi :

$I_0(C) \circ I_0(C) = I_0\{I_0(C)\} = I_0\{0,8,5\} = \langle 0,4,7 \rangle = T_0(C)$

$I_1(C) \circ I_0(C) = I_1\{I_0(C)\} = I_1\{0,8,5\} = \langle 1,5,8 \rangle = T_1(C)$

$I_2(C) \circ I_0(C) = I_2\{I_0(C)\} = I_2\{0,8,5\} = \langle 2,6,9 \rangle = T_2(C)$

$I_3(C) \circ I_0(C) = I_3\{I_0(C)\} = I_3\{0,8,5\} = \langle 3,7,10 \rangle = T_3(C)$

$I_4(C) \circ I_0(C) = I_4\{I_0(C)\} = I_4\{0,8,5\} = \langle 4,8,11 \rangle = T_4(C)$

$I_4(C) \circ I_0(C) = I_4\{I_0(C)\} = I_4\{0,8,5\} = \langle 4,9,0 \rangle = T_5(C)$

$\vdots$

$I_0(C) \circ I_1(C) = I_0\{I_1(C)\} = I_0\{1,9,6\} = \langle 11,3,6 \rangle = T_{11}(C)$

$I_1(C) \circ I_1(C) = I_1\{I_1(C)\} = I_1\{1,9,6\} = \langle 0,4,7 \rangle = T_0(C)$

$I_2(C) \circ I_1(C) = I_2\{I_1(C)\} = I_2\{1,9,6\} = \langle 1,5,8 \rangle = T_1(C)$

$I_3(C) \circ I_1(C) = I_3\{I_1(C)\} = I_3\{1,9,6\} = \langle 2,6,9\rangle = T_2(C)$

$I_4(C) \circ I_1(C) = I_4\{I_1(C)\} = I_4\{1,9,6\} = \langle 3,7,10\rangle = T_3(C)$

$I_5(C) \circ I_1(C) = I_5\{I_1(C)\} = I_5\{1,9,6\} = \langle 4,8,11\rangle = T_4(C)$

$\vdots$

$I_0(C) \circ I_2(C) = I_0\{I_2(C)\} = I_0\{2,10,7\} = \langle 10,2,5\rangle = T_{10}(C)$

$I_1(C) \circ I_2(C) = I_1\{I_2(C)\} = I_1\{2,10,7\} = \langle 11,3,6\rangle = T_{11}(C)$

$I_2(C) \circ I_2(C) = I_2\{I_2(C)\} = I_2\{2,10,7\} = \langle 0,4,7\rangle = T_0(C)$

$I_3(C) \circ I_2(C) = I_3\{I_2(C)\} = I_3\{2,10,7\} = \langle 1,5,8\rangle = T_1(C)$

$I_4(C) \circ I_2(C) = I_4\{I_2(C)\} = I_4\{2,10,7\} = \langle 2,6,9\rangle = T_2(C)$

$I_5(C) \circ I_2(C) = I_5\{I_2(C)\} = I_5\{2,10,7\} = \langle 3,7,10\rangle = T_3(C)$

$\vdots$

$I_0(C) \circ I_3(C) = I_0\{I_3(C)\} = I_0\{3,11,8\} = \langle 9,1,4\rangle = T_9(C)$

$I_1(C) \circ I_3(C) = I_1\{I_3(C)\} = I_1\{3,11,8\} = \langle 10,2,5\rangle = T_{10}(C)$

$I_2(C) \circ I_3(C) = I_2\{I_3(C)\} = I_2\{3,11,8\} = \langle 11,3,6\rangle = T_{11}(C)$

$I_3(C) \circ I_3(C) = I_3\{I_3(C)\} = I_3\{3,11,8\} = \langle 0,4,7\rangle = T_0(C)$

$I_4(C) \circ I_3(C) = I_4\{I_3(C)\} = I_4\{3,11,8\} = \langle 1,5,8\rangle = T_1(C)$

$I_5(C) \circ I_3(C) = I_5\{I_3(C)\} = I_5\{3,11,8\} = \langle 2,6,9\rangle = T_2(C)$

$\vdots$

$I_0(C) \circ I_4(C) = I_0\{I_4(C)\} = I_0\{4,0,9\} = \langle 8,0,3\rangle = T_8(C)$

$I_1(C) \circ I_4(C) = I_1\{I_4(C)\} = I_1\{4,0,9\} = \langle 9,1,4\rangle = T_9(C)$

$I_2(C) \circ I_4(C) = I_2\{I_4(C)\} = I_2\{4,0,9\} = \langle 10,2,5\rangle = T_{10}(C)$

$I_3(C) \circ I_4(C) = I_3\{I_4(C)\} = I_3\{4,0,9\} = \langle 11,3,6\rangle = T_{11}(C)$

$I_4(C) \circ I_4(C) = I_4\{I_4(C)\} = I_4\{4,0,9\} = \langle 0,4,7 \rangle = T_0(C)$

$I_5(C) \circ I_4(C) = I_5\{I_4(C)\} = I_5\{4,0,9\} = \langle 1,5,8 \rangle = T_1(C)$

$\vdots$

$I_0(C) \circ I_5(C) = I_0\{I_5(C)\} = I_0\{5,1,10\} = \langle 7,11,2 \rangle = T_7(C)$

$I_1(C) \circ I_5(C) = I_1\{I_5(C)\} = I_1\{5,1,10\} = \langle 8,0,3 \rangle = T_8(C)$

$I_2(C) \circ I_5(C) = I_2\{I_5(C)\} = I_2\{5,1,10\} = \langle 9,1,4 \rangle = T_9(C)$

$I_3(C) \circ I_5(C) = I_3\{I_5(C)\} = I_3\{5,1,10\} = \langle 10,2,5 \rangle = T_{10}(C)$

$I_4(C) \circ I_5(C) = I_4\{I_5(C)\} = I_4\{5,1,10\} = \langle 11,3,6 \rangle = T_{11}(C)$

$I_5(C) \circ I_5(C) = I_5\{I_5(C)\} = I_5\{5,1,10\} = \langle 0,4,7 \rangle = T_0(C)$

$\vdots$

$I_0(C) \circ I_6(C) = I_0\{I_6(C)\} = I_0\{6,2,11\} = \langle 6,10,1 \rangle = T_6(C)$

$I_1(C) \circ I_6(C) = I_1\{I_6(C)\} = I_1\{6,2,11\} = \langle 7,11,2 \rangle = T_7(C)$

$I_2(C) \circ I_6(C) = I_2\{I_6(C)\} = I_2\{6,2,11\} = \langle 8,0,3 \rangle = T_8(C)$

$I_3(C) \circ I_6(C) = I_3\{I_6(C)\} = I_3\{6,2,11\} = \langle 9,1,4 \rangle = T_9(C)$

$I_4(C) \circ I_6(C) = I_4\{I_6(C)\} = I_4\{6,2,11\} = \langle 10,2,5 \rangle = T_{10}(C)$

$I_5(C) \circ I_6(C) = I_5\{I_6(C)\} = I_5\{6,2,11\} = \langle 11,3,6 \rangle = T_{11}(C)$

$\vdots$

$I_0(C) \circ I_7(C) = I_0\{I_7(C)\} = I_0\{7,3,0\} = \langle 5,9,0 \rangle = T_5(C)$

$I_1(C) \circ I_7(C) = I_1\{I_7(C)\} = I_1\{7,3,0\} = \langle 6,10,1 \rangle = T_6(C)$

$I_2(C) \circ I_7(C) = I_2\{I_7(C)\} = I_2\{7,3,0\} = \langle 7,11,2 \rangle = T_7(C)$

$I_3(C) \circ I_7(C) = I_3\{I_7(C)\} = I_3\{7,3,0\} = \langle 8,0,3 \rangle = T_8(C)$

$I_4(C) \circ I_7(C) = I_4\{I_7(C)\} = I_4\{7,3,0\} = \langle 9,1,4 \rangle = T_9(C)$

$I_5(C) \circ I_7(C) = I_5\{I_7(C)\} = I_5\{7,3,0\} = \langle 10,2,5 \rangle = T_{10}(C)$

$\vdots$

$I_0(C) \circ I_8(C) = I_0\{I_8(C)\} = I_0\{8,4,1\} = \langle 4,8,11 \rangle = T_4(C)$

$I_1(C) \circ I_8(C) = I_1\{I_8(C)\} = I_1\{8,4,1\} = \langle 5,9,0 \rangle = T_5(C)$

$I_2(C) \circ I_8(C) = I_2\{I_8(C)\} = I_2\{8,4,1\} = \langle 6,10,1 \rangle = T_6(C)$

$I_3(C) \circ I_8(C) = I_3\{I_8(C)\} = I_3\{8,4,1\} = \langle 7,11,2 \rangle = T_7(C)$

$I_4(C) \circ I_8(C) = I_4\{I_8(C)\} = I_4\{8,4,1\} = \langle 8,0,3 \rangle = T_8(C)$

$I_5(C) \circ I_8(C) = I_5\{I_8(C)\} = I_5\{8,4,1\} = \langle 9,1,4 \rangle = T_9(C)$

$\vdots$

$I_0(C) \circ I_9(C) = I_0\{I_9(C)\} = I_0\{9,5,2\} = \langle 3,7,10 \rangle = T_3(C)$

$I_1(C) \circ I_9(C) = I_1\{I_9(C)\} = I_1\{9,5,2\} = \langle 4,8,11 \rangle = T_4(C)$

$I_2(C) \circ I_9(C) = I_2\{I_9(C)\} = I_2\{9,5,2\} = \langle 5,9,0 \rangle = T_5(C)$

$I_3(C) \circ I_9(C) = I_3\{I_9(C)\} = I_3\{9,5,2\} = \langle 6,10,1 \rangle = T_6(C)$

$I_4(C) \circ I_9(C) = I_4\{I_9(C)\} = I_4\{9,5,2\} = \langle 7,11,2 \rangle = T_7(C)$

$I_5(C) \circ I_9(C) = I_5\{I_9(C)\} = I_5\{9,5,2\} = \langle 8,0,3 \rangle = T_8(C)$

$\vdots$

$I_0(C) \circ I_{10}(C) = I_0\{I_{10}(C)\} = I_0\{10,6,3\} = \langle 2,6,9 \rangle = T_2(C)$

$I_1(C) \circ I_{10}(C) = I_1\{I_{10}(C)\} = I_1\{10,6,3\} = \langle 3,7,10 \rangle = T_3(C)$

$I_2(C) \circ I_{10}(C) = I_2\{I_{10}(C)\} = I_2\{10,6,3\} = \langle 4,8,11 \rangle = T_4(C)$

$I_3(C) \circ I_{10}(C) = I_3\{I_{10}(C)\} = I_3\{10,6,3\} = \langle 5,9,0 \rangle = T_5(C)$

$I_4(C) \circ I_{10}(C) = I_4\{I_{10}(C)\} = I_4\{10,6,3\} = \langle 6,10,1 \rangle = T_6(C)$

$I_5(C) \circ I_{10}(C) = I_5\{I_{10}(C)\} = I_5\{10,6,3\} = \langle 7,11,2 \rangle = T_7(C)$

$\vdots$

$I_0(C) \circ I_{11}(C) = I_0\{I_{11}(C)\} = I_0\{11,7,4\} = \langle 1,5,8 \rangle = T_1(C)$

$I_1(C) \circ I_{11}(C) = I_1\{I_{11}(C)\} = I_1\{11,7,4\} = \langle 2,6,9 \rangle = T_2(C)$

$I_2(C) \circ I_{11}(C) = I_2\{I_{11}(C)\} = I_2\{11,7,4\} = \langle 3,7,10 \rangle = T_3(C)$

$I_3(C) \circ I_{11}(C) = I_3\{I_{11}(C)\} = I_3\{11,7,4\} = \langle 4,8,11 \rangle = T_4(C)$

$I_4(C) \circ I_{11}(C) = I_4\{I_{11}(C)\} = I_4\{11,7,4\} = \langle 5,9,0 \rangle = T_5(C)$

$I_5(C) \circ I_{11}(C) = I_5\{I_{11}(C)\} = I_5\{11,7,4\} = \langle 6,10,1 \rangle = T_6(C)$

$\vdots$

Hasil komposisi dari semua fungsi transposisi dan fungsi inversi ini, dapat dituliskan ke dalam bentuk Tabel Cayley seperti di bawah ini. Hasil komposisi ini akan sama untuk semua nada.

Tabel 3.2.2.1

TabelCayley

$\circ$	T_0	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	T_9	T_{10}	T_{11}	I_0	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	I_6	I_7	I_8	I_9	I_{10}	I_{11}
T_0	T_0	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	T_9	T_{10}	T_{11}	I_0	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	I_6	I_7	I_8	I_9	I_{10}	I_{11}
T_1	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	T_9	T_{10}	T_{11}	T_0	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	I_6	I_7	I_8	I_9	I_{10}	I_{11}	I_0
T_2	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	T_9	T_{10}	T_{11}	T_0	T_1	I_2	I_3	I_4	I_5	I_6	I_7	I_8	I_9	I_{10}	I_{11}	I_0	I_1
T_3	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	T_9	T_{10}	T_{11}	T_0	T_1	T_2	I_3	I_4	I_5	I_6	I_7	I_8	I_9	I_{10}	I_{11}	I_0	I_1	I_2
T_4	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	T_9	T_{10}	T_{11}	T_0	T_1	T_2	T_3	I_4	I_5	I_6	I_7	I_8	I_9	I_{10}	I_{11}	I_0	I_1	I_2	I_3
T_5	T_5	T_6	T_7	T_8	T_9	T_{10}	T_{11}	T_0	T_1	T_2	T_3	T_4	I_5	I_6	I_7	I_8	I_9	I_{10}	I_{11}	I_0	I_1	I_2	I_3	I_4
T_6	T_6	T_7	T_8	T_9	T_{10}	T_{11}	T_0	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	I_6	I_7	I_8	I_9	I_{10}	I_{11}	I_0	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5
T_7	T_7	T_8	T_9	T_{10}	T_{11}	T_0	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	I_7	I_8	I_9	I_{10}	I_{11}	I_0	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	I_6
T_8	T_8	T_9	T_{10}	T_{11}	T_0	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	I_8	I_9	I_{10}	I_{11}	I_0	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	I_6	I_7
T_9	T_9	T_{10}	T_{11}	T_0	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	I_9	I_{10}	I_{11}	I_0	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	I_6	I_7	I_8
T_{10}	T_{10}	T_{11}	T_0	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	T_9	I_{10}	I_{11}	I_0	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	I_6	I_7	I_8	I_9
T_{11}	T_{11}	T_0	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	T_9	T_{10}	I_{11}	I_0	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	I_6	I_7	I_8	I_9	I_{10}

$\circ$	T_0	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	T_9	T_{10}	T_{11}	I_0	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	I_6	I_7	I_8	I_9	I_{10}	I_{11}
I_0	I_0	I_{11}	I_{10}	I_9	I_8	I_7	I_6	I_5	I_4	I_3	I_2	I_1	T_0	T_{11}	T_{10}	T_9	T_8	T_7	T_6	T_5	T_4	T_3	T_2	T_1
I_1	I_1	I_0	I_{11}	I_{10}	I_9	I_8	I_7	I_6	I_5	I_4	I_3	I_2	T_1	T_0	T_{11}	T_{10}	T_9	T_8	T_7	T_6	T_5	T_4	T_3	T_2
I_2	I_2	I_1	I_0	I_{11}	I_{10}	I_9	I_8	I_7	I_6	I_5	I_4	I_3	T_2	T_1	T_0	T_{11}	T_{10}	T_9	T_8	T_7	T_6	T_5	T_4	T_3
I_3	I_3	I_2	I_1	I_0	I_{11}	I_{10}	I_9	I_8	I_7	I_6	I_5	I_4	T_3	T_2	T_1	T_0	T_{11}	T_{10}	T_9	T_8	T_7	T_6	T_5	T_4
I_4	I_4	I_3	I_2	I_1	I_0	I_{11}	I_{10}	I_9	I_8	I_7	I_6	I_5	T_4	T_3	T_2	T_1	T_0	T_{11}	T_{10}	T_9	T_8	T_7	T_6	T_5
I_5	I_5	I_4	I_3	I_2	I_1	I_0	I_{11}	I_{10}	I_9	I_8	I_7	I_6	T_5	T_4	T_3	T_2	T_1	T_0	T_{11}	T_{10}	T_9	T_8	T_7	T_6
I_6	I_6	I_5	I_4	I_3	I_2	I_1	I_0	I_{11}	I_{10}	I_9	I_8	I_7	T_6	T_5	T_4	T_3	T_2	T_1	T_0	T_{11}	T_{10}	T_9	T_8	T_7
I_7	I_7	I_6	I_5	I_4	I_3	I_2	I_1	I_0	I_{11}	I_{10}	I_9	I_8	T_7	T_6	T_5	T_4	T_3	T_2	T_1	T_0	T_{11}	T_{10}	T_9	T_8
I_8	I_8	I_7	I_6	I_5	I_4	I_3	I_2	I_1	I_0	I_{11}	I_{10}	I_9	T_8	T_7	T_6	T_5	T_4	T_3	T_2	T_1	T_0	T_{11}	T_{10}	T_9
I_9	I_9	I_8	I_7	I_6	I_5	I_4	I_3	I_2	I_1	I_0	I_{11}	I_{10}	T_9	T_8	T_7	T_6	T_5	T_4	T_3	T_2	T_1	T_0	T_{11}	T_{10}
I_{10}	I_{10}	I_9	I_8	I_7	I_6	I_5	I_4	I_3	I_2	I_1	I_0	I_{11}	T_{10}	T_9	T_8	T_7	T_6	T_5	T_4	T_3	T_2	T_1	T_0	T_{11}
I_{11}	I_{11}	I_{10}	I_9	I_8	I_7	I_6	I_5	I_4	I_3	I_2	I_1	I_0	T_{11}	T_{10}	T_9	T_8	T_7	T_6	T_5	T_4	T_3	T_2	T_1	T_0

BAB IV

KESIMPULAN DAN SARAN

4.1 Kesimpulan

Dari pembahasan dapat disimpulkan sebagai berikut :

1. Pada tugas akhir ini, fungsi transposisi dan inversi adalah fungsi yang domain dan kodomainnya adalah bilangan bulat modulo 12 yang didefinisikan dengan $T_n(x) = (x+n) \bmod 12$ dan $I_n(x) = (-x+n) \bmod 12$.
2. Fungsi transposisi dan fungsi inversi yang diaplikasikan pada kelas tangga nada akan menghasilkan nada baru yang memiliki bunyi yang sama tetapi berbeda pada tinggi rendah nada.
3. Himpunan fungsi transposisi dan fungsi inversi membentuk grup *T/I*.

4.2 Saran

Untuk penelitian selanjutnya yang berhubungan dengan musik, terdapat sebuah grup lain pada teori musik yang dikenal dengan grup PLR. Grup lain yang sama seperti grup T/I adalah grup PLR. $P(x)$ adalah bentuk kebalikan dari x dengan not pertama dan ketiga dipertukar letakkan. $L(x)$ adalah bentuk kebalikan dari x dengan not kedua dan ketiga dipertukar letakkan. $R(x)$ adalah bentuk kebalikan dari x dengan not pertama dan kedua dipertukar letakkan. Seorang komposer mendefinisikan bahwa P adalah fungsi yang membawa suatu paduan nada dan memetakannya ke minor atau mayor paralelnya. Fungsi L membawa perubahan nada

BAB IV

KESIMPULAN DAN SARAN

4.1 Kesimpulan

Dari pembahasan dapat disimpulkan sebagai berikut :

1. Pada tugas akhir ini, fungsi transposisi dan inversi adalah fungsi yang domain dan kodomainnya adalah bilangan bulat modulo 12 yang didefinisikan dengan $T_n(x) = (x + n) \bmod 12$ dan $I_n(x) = (-x + n) \bmod 12$.
2. Fungsi transposisi dan fungsi inversi yang diaplikasikan pada kelas tangga nada akan menghasilkan nada baru yang memiliki bunyi yang sama tetapi berbeda pada tinggi rendah nada.
3. Himpunan fungsi transposisi dan fungsi inversi membentuk grup *T/I*.

4.2 Saran

Untuk penelitian selanjutnya yang berhubungan dengan musik, terdapat sebuah grup lain pada teori musik yang dikenal dengan grup PLR. Grup lain yang sama seperti grup T/I adalah grup PLR. $P(x)$ adalah bentuk kebalikan dari x dengan not pertama dan ketiga dipertukar letakkan. $L(x)$ adalah bentuk kebalikan dari x dengan not kedua dan ketiga dipertukar letakkan. $R(x)$ adalah bentuk kebalikan dari x dengan not pertama dan kedua dipertukar letakkan. Seorang komposer mendefinisikan bahwa P adalah fungsi yang membawa suatu paduan nada dan memetakannya ke minor atau mayor paralelnya. Fungsi L membawa perubahan nada yang signifikan. Sedangkan R membawa paduan nada ke minor atau mayor relatifnya. Himpunan semua komposisi dari P, L, dan R dengan dilengkapi fungsi komposisi akan membentuk grup. Grup ini dinamakan grup PLR.

Pembaca yang berminat dapat membahas tentang :

1. Grup PLR dan sifat-sifatnya.
2. Hubungan antara grup T/I dengan grup PLR.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Arifin, A. 2000. *Aljabar*.ITB Bandung. Bandung.

[2] Crans, Alissa S. *Musical Actions of Dihedral Groups*. 2009. The Mathematical Association Of America. Montly 116.

[3] Departemen Pendidikan & Kebudayaan [Depdikbud]. 1991. *Kamus Besar Bahasa Indonesia*. BalaiPustaka, Jakarta

[4] Fiore, Thomas M. 2009. *Music and Mathematics, Journal of Music Theory* 41. The University of Chicago. USA.

[5] Herstein. 1975. *Topics in Algebra*. University of Chicago. USA

[6] Munir, R. 2003. *Matematika Diskrit*. Informatika ITB. Bandung

[7] Purcell, EJ. 1987. *Kalkulus dan Geometri Analitis*, Edisi Kedelapan. Erlangga. Jakarta

[8] Rosen, Kenneth H. 1998. *Discrete Mathematics and Its Applications. Fourth edition*. China Machine Press. China

[9] Sukohardi, Al. 2009. *Teori Musik Umum*. Pusat Musik Liturgi. Yogyakarta

RIWAYAT HIDUP PENULIS

Penulis dilahirkan di Koto Taratak pada tanggal 3 Maret 1985. Anak kelima dari pasangan Muas, S.Ag dan Ulfanilas. Penulis memulai pendidikannya pada tahun 1991 di SD Negeri No 47 Koto Taratak. Pada tahun 1997, penulis melanjutkan pendidikannya di SLTP Negeri 12 Padang. Pada tahun 2000, penulis melanjutkan pendidikannya di SMU Negeri 1 Sutera dan tamat pada tahun 2003. Pada tahun 2004, penulis di terima menjadi mahasiswa Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) Universitas Andalas melalui jalur Seleksi Penerimaan Mahasiswa Baru Non Reguler. Selama di bangku perkuliahan penulis pernah menjadi ketua pelaksana Kemping Mahasiswa Matematika (KMM) pada tahun 2006, menjadi ketua pelaksana acara Jumpa Musik Kampus (JAMSIKA) 14 tahun 2007. Selain itu penulis juga menjadi pengurus HIMATIKA periode 2005/2006 pada divisi pembinaan mahasiswa dan anggota baru serta aktif di berbagai kegiatan HIMATIKA. Untuk syarat meraih gelar Sarjana Sains (S.Si) di Jurusan Matematika FMIPA UNAND, penulis pernah mengikuti magang di PT POS Indonesia pada bulan November 2007.